KLINGNÉ TAKÁCS ANNA

Természetes?

A következő gondolatok akkor jutottak eszembe, amikor kislányom első osztályba kezdett járni. Persze előtte is gyakran téma volt ez matematikaórákon a tanítványaimmal. Mi az, ami a növendékeimet is izgatta? Természetesen, hogy a **0** a természetes számok közé sorolandó, avagy sem.

Mi okozhatja ezt a bizonytalanságot?

Kezdjük mindjárt az elején! Hogyan is tanítjuk számolni a még éppen csak cseperedő gyermekünket? Természetesen így: 1, 2, 3 és így tovább. Szó sem esik a nulláról. Az általános iskolába érve az első számjegy, amit megtanul, a **0**. Mi is az a nulla? – kérdezik. Hát, az a semmi – hangzik a válasz. Igen nehezen értik meg azokat a műveleteket, amelyekben a **0** hozzáadása, illetve kivonása szerepel. A következő nehézség aztán a **0**-val való osztás. Ugyanis azt még csak elképzelik, hogy „semmi szorozva a semmivel vagy akár 2-vel, a kapott szorzat értéke **0** lesz". Bár a tanult szorzótábla sem úgy kezdődik, hogy **0**-szor 1, 2, 3, ..., 10.

„Semmi részre" osztani valamit? Még kimondani is furcsa! Nincs értelme! Aztán ezt matematikaórákon egyfolytában hangsúlyozzuk.

Tekintsük át a számfogalom történeti kialakulását!

Természetünkből adódóan szeretjük dolgainkat számon tartani, számolgatni, mennyiségileg összehasonlítani. Biztosan így volt ez az ősidőkben is: az ősember 1 mamut elejtésekor 1 vonalat húzott a barlang falára, 2-nél 2 vonalat és így tovább. A vonalak húzogatása azonban hosszadalmas volt, így idővel ezeknek külön jelöléseket találtak ki. Így alakultak ki a számjegyek. Két csorda összeterelésével sem volt gond, csupán csak össze kellett adni az egyes csordák példányainak számát. Az összeadás működött. (Ezt ma úgy nevezzük, hogy a természetes számok halmaza az összeadás műveletére nézve zárt, azaz két természetes szám összege is természetes szám, nem vezet ki a természetes számok köréből, halmazából.) Az első veszekedéseket az válthatta ki, amikor több állatot akart a csalódott társ elhajtani a csordából, mint amennyit bevitt. A kivonással baj van! 5 marhából 7-t elhajtani? Hogyan lehet? No, azért, hogy ezt a műveletet is el tudjuk végezni, később bevezették az egész számok fogalmát. Egész számoknak nevezzük a két természetes szám különbségeként előálló számokat.

A számírás legkorábbi bizonyítékára Dél-Afrikában, Szváziföldön bukkantak, ez egy pávián szárkapocscsontja, 29 bemetszéssel. Ez a lelet körülbelül i. e. 35 000-re keltezhető, a Cseh Köztársaság területén találták meg egy farkas orsócsontját, a kora megközelítőleg 32 000 év, rajta 55 bemetszés, két, ötös csoportokból álló sorban. Az elejtett állatokat számlálhatták így össze. A kb. i.e. 20 000-ből származó ún. Isango-csont, amelyet Uganda és a Kongói

Demokratikus Köztársaság között húzódó Edwards-tó partján találtak, már nem csak rováspálca. A mikroszkopikus vizsgálatok további jeleket derített fel, amelyek a Hold fázisaival lehetnek kapcsolatban.

Fő matematikai forrásaink részben az Óbabiloni Birodalomból származnak. Ők hatvanas alapú számrendszerrel dolgoztak, ami az időegységek felosztásában a mai napig is használatos. Kb. i. e. 2000-től terjedt el a helyi értékes rendszer, amely csak két ékírásjelet használt. A számkört kibővítették a hatvanados törtekkel, viszont a **0**-ra nem volt jelük. Az ilyen helyi értéket jelző szimbólumot az Újbabiloni Birodalom létrejöttéig nem használtak. Ezért az óbabiloni számok értelmezésekor nem árt az óvatossá, mivel mindig a szövegösszefüggésből derül ki a szimbólumok helyes értelmezése.

Kis történeti kitekintés után térjünk vissza eredeti témánkhoz!

A mennyiségek megsokszorozása természetes számokkal szintén jól működött. A következő nehézség az igazságos részekre osztás problémája volt, így alakult ki a racionális számok fogalma. (Racionális számoknak nevezzük az olyan $^a/_b$ alakban felírható mennyiségeket, amelyekben „a" egész számot jelöl, „b" **0**-tól különböző egész szám. Az osztozkodás ősterméSzetünkből adódik, „semmi"-részre elosztani valamit igencsak messze áll elképzeléseinktől. Ezek szerint a **0** nem természetes szám, mert egyik legősibb fogalmunkat nem tudjuk vele értelmezni. (Megjegyzem, én még így is tanultam.)

Az emberiség fejlődése, a technika vívmányai a különböző tudományágak kialakulásához vezettek. Így született meg a matematika is, s hozta magával az újabb számfogalmak kialakulását: elsőként talán az irracionális számok fogalma alakult ki, annak kapcsán, hogy az $x^2=2$ egyenletet meg akartuk oldani. Ekkor vezetjük be a $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ fogalmát, még bizonyítjuk is, hogy nem írhatók fel két egész szám hányadosaként. De mi a helyzet a π-vel? Már az ókori görögök is próbáltak jó közelítéseket adni az értékékére. Ma már tudjuk, hogy ő sem áll elő két egész szám hányadosaként.

A következő probléma az $x^2=-1$ egyenlet megoldása volt, így jutunk el a komplex számok fogalmához.

Alapvető természetünkből adódik, hogy szeretjük elképzelni dolgainkat. A számokkal sincs ez másképp. Alkottunk egy modellt, amelyen mindenki jól eligazodik. Ez a modell a számegyenes. Az egyenes egy folytonos vonal. Felmerül a kérdés: vajon tudunk-e minden egyes pontjához számokat rendelni? A válasz: igen. A **0** és az egység kijelölésével egyértelműen meghatározzuk a számok helyét (a törtek pontos helyének meghatározásához a párhuzamos szelők tételét, a $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ meghatározásához Pitagorasz-tételét alkalmazzuk).

A számegyenes nagyon is valódi! A számegyenes pontjainak megfeleltetett számokat hát elneveztük valós számoknak.

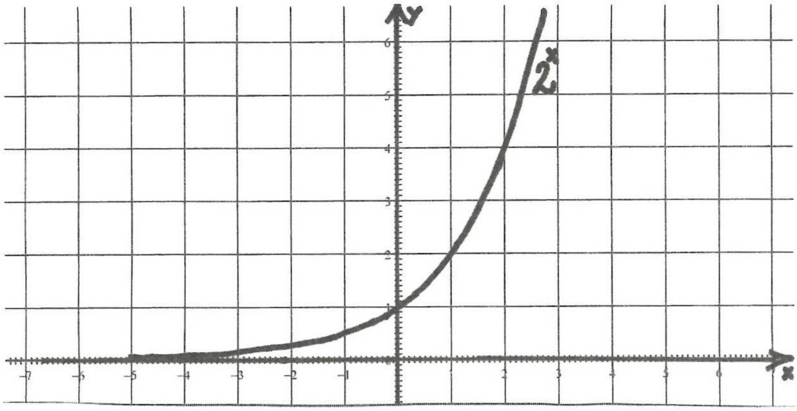
A komplex számok szemléltetésénél már ki kell lépnünk az egyenesből, őket síkban ábrázoljuk, akárcsak a koordináta-rendszerben az origó középpontú helyvektorokat.

*De térjünk csak vissza a **0**-hoz!*

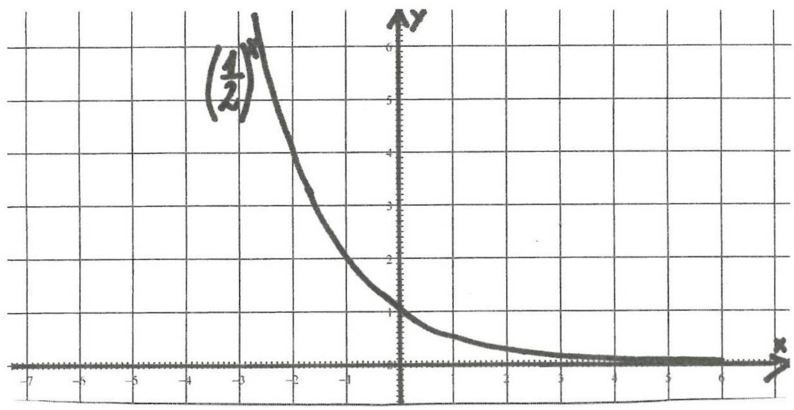
Értelmezzük a hatvány fogalmát, majd a negatív egész kitevős hatványt, törtkitevőst. A kapott értékeket ábrázoljuk koordináta-rendszerben, majd utána azt mondjuk, hogy az ily módon definiált hatványfogalomra építve és a permanencia-elvet nem sértve, a **0**-tól különböző valós számok nulladik hatványát **1**-nek definiáljuk (a **0** nulladik hatványát nem értelmezzük).

Tekintsük át a függvények grafikonjainak alakját!

Az exponenciális függvények az alábbi alakot öltik, ha az alapszám nagyobb 1-nél.



Alakjuk az alábbi lesz, ha az alapszám **0** és 1 közé esik.



Úgy szoktunk fogalmazni, hogy a matematika egyik „mély" fogalmához jutottunk, amit az emberi agynak tanulnia kell. Tulajdonképpen az exponenciális függvény folytonosságáról van szó, a folytonosság pedig a matematikai analízis egyik legnehezebb, „legmélyebb" fogalma.

*Tehát a **0** nem is olyan természetes szám, mint a társai.*

Gondoljuk csak át a természetes számok megadását Peano-féle axiómákkal:

P1: N nem üres halmaz és van egy kitüntetett eleme a **0**, ami benne van az N halmazban.

P2: Adott egy ' leképezés, mely az N halmaz elemeinek megfelelteti az N halmaz elemeit.

P3: Nincs olyan n, melyre n'= 0.

P4: Minden n,m N-beli elemek esetén, ha n'=m', akkor n=m.

P5: Ha $U \subseteq N$ olyan, hogy $0 \in U$ és ha $n \in U$ mindannyiszor $n' \in U$, akkor U=N.

Az axiómák is úgy fogalmaznak, hogy van egy kitüntetett elem, és ez a **0**.

Gondolatébresztőnek szántam a fent leírt mondatokat. Figyeljünk a számfogalom kialakítása kapcsán, mert ami nekünk már egyértelmű, azt gyermekeinknek tanulnia kell. Az első iskolás években jól alapozzuk meg a természetes fogalmát és műveleteiket, térjünk ki esetleg arra, hogy melyek a negatív egész számok, milyen meggondolásokra vezethető vissza a bevezetésük. Felsőben tovább erősíthetjük ezt, valamint a racionális szám fogalmát és műveleteit, külön kiemelve a két alakot (tizedes és közönséges tört), kitérhetünk néhány valós számra is a Pitagorasz-tétel kapcsán. A középiskolában már tovább tudjuk bővíteni a számfogalmat a racionális és irracionális számok fogalmával, modellezzük a valós számokat a számegyenessel, gyakoroljuk az irracionális számok műveleteit.

A tanulásnak azonban itt még nincs vége, a további értelmezések megtanulása pedig már a felsőoktatás feladata.

Érdemes beszélgetni tanítványainkkal a fogalmak történeti kialakulásáról, érdekelni fogja őket, akárcsak az ókori, középkori történelem.

TISZTELGÉS AZ IDŐS PEDAGÓGUSOK ELŐTT

A 2004/2005-ös tanév megnyitó ünnepélyén jelen volt 32 idős pedagógus. Ők 50 éve vagy még régebben kaptak tanítói, óvónői oklevelet. Ünnepélyünkön vehették át a díszoklevelüket, majd vendégül látta őket *Rosta István*, a Kaposvári Egyetem Pedagógiai Főiskolai Karának főigazgatója és több vezetőtársa. A Pedagógiai Kar egyébként összesen ebben az évben 173 tanítónak, óvónőnek adott ki díszoklevelet. Közülük 138-an arany-, 25-en gyémánt-, 6-an vas- és 4-en rubinoklevelet kaptak attól függően, hogy 50, 60, 65. illetve 70 évvel ezelőtt szerezték meg eredeti oklevelüket. Sokan ünnepélyes keretek között vették át díszoklevelüket Pécsett, vagy lakóhelyükön, volt munkahelyükön. Szerkesztőségünk is gratulál idős kollégáinknak és békés, nyugodt éveket, kinek-kinek újabb díszoklevelet kívánunk.