

KOVÁCS VERONIKA<sup>1</sup>

## Gráfok modern bevezetése a középiskolában

*A gráfelmélet a matematika egy napjainkban gyorsan fejlődő területe. A navigációs rendszerek, az emberi kapcsolatok vagy akár az agysejtek rendszere is modellezhető gráfok segítségével. 1984-ben Magyarországon még a matematika tanári képzésnek sem volt része a gráfelmélet, azonban ma már a középiskolai érettségi kötelező eleme. Munkánkban egy középiskolai gráfelmélet-oktatói módszerre teszünk javaslatot. Kutatók javaslatai alapján dolgoztunk ki egy tananyagot, melyet egy kilencedikes osztályban próbáltunk ki. Végül egy korábbi érettségikből válogatott feladatsor segítségével teszteltük a tanítási módszerünket.*

### Bevezetés

A középiskolai matematika tananyag a matematika számos ágát érinti. Ilyen például az egyenletek megoldása, a geometriai transzformációk, a valószínűségszámítás, a függvények témaköre vagy a kombinatorika. Bátran kijelenthetjük, hogy a legmostoháiban tárgyalt két témakör éppen két olyan része a matematikának, amelyben a magyar kutatók vezető szerepet játszanak világszerte, és amelyek számos fontos alkalmazással bírnak. Ez a két terület a számelmélet és a gráfelmélet.

A számelméletre a teljes négyéves kerettanterv 4–5 órát(!) szán, azt is 9. osztályban. A számelmélet oktatásának középiskolai helyzetéről (Csányi, Fábián, Szabó, Szabó, Vásárhelyi, 2016) (Csányi, Fábián, Szabó and Szabó, 2015) már készült felmérés. Dolgozatunkban a gráfelméletet vizsgáljuk.

A gráfelmélet és annak alkalmazásai a matematika és a tudomány (egyik) robbanásszerűen fejlődő területe. Magyarországon az első gráfokkal foglalkozó feladat 1947-ben bukkant fel a Kürschák József Matematikai Tanulóversenyen. Gráfokat először Lovász László tanított Szegeden a '70-es évek végén, '80-as évek elején. Könyvét (Lovász, 1999) az egész világon alapműként kezelik. Budapesten 1981-től oktatnak gráfelméletet, és 1985-től része a tanárszakos anyagnak, 1991 óta pedig már minden műszaki-informatikai szak anyagának szerves része.

<sup>1</sup> egyetemi hallgató, Eötvös Loránd Tudományegyetem, vera.kovacs21@gmail.com

A gráfelmélet jelenléte a mindennapjainkban folyamatos. Az elméletnek már külön területei vannak, külön-külön alkalmazásokkal a mindennapi életben. Ezek felsorolása túlmutat a munkákon, csak néhányat emelünk ki a szemléltetés kedvéért.

Egy érdekes példa a számítógépek alaplapjainak, illetve a nyomtatott áramkörök készítésének elmélete. A kérdés a következő: adott egy alaplap-elrendezés pontokkal és éllel. Hogyan állítsuk be (programozzuk) az áramkörnyomtató gépet, hogy az az áramkört a lehető leghatékonyabban készítse el. Csak erről az egy témáról évente hat-nyolcszáz, nemzetközileg referált folyóiratcikk jelenik meg. Ha egy frissebb monográfiát keresnénk, akkor talán Prömel (2002) ajánlanánk.

Egy másik jól ismert és sokat használt alkalmazás a párosítások elmélete. Míg meszeszerűen a diákok számára jó motiváció Artúr király udvarában az úrhölgyeket és a lovagokat párokba osztani a bálhoz úgy, hogy mindenki csak neki kedves partnerrel táncoljon, a valóságban az elmélet használata nem ismer korlátokat. Ezt alkalmazzák sportbajnokságok szervezésénél, álláskeresésnél, egyetemi felvételnél és gazdasági folyamatok szabályozásánál, modellezésénél. A 2010-es közgazdasági Nobel-díjat Christopher Pissarides a stabil párosításokon alkalmazására és fejlesztésére kapta. Elmélete (Pissarides, 2000) a stabil párosítások segítségével kiegyenlítette a munkaerő-kínálat és munkaerő-ajánlat közti egyenlőtlenségeket.

A 2012-es közgazdasági Nobel-díjat ismét a párosítások alkalmazásáért ítelték oda<sup>2</sup>.

A továbbiakban megemlítünk a gráfok mindennapi alkalmazhatóságáról, alap- és kiindulási műként Dieter, (2013) monográfiáját ajánljuk.

A legrövidebb útkeresés algoritmus az egyik olyan algoritmus, amely számítógépre is gyorsan implementálható. Ezt használják többek közt az útvonaltervező programok, az internetes keresők, de számos alkalmazása van a kereskedelemben, áruellátásban. Itt nemcsak az lehet a kérdés, hogy két pont között melyik a legrövidebb út, hanem az is, hogy egyszerre mondjuk meg bármely két pontra, hogy ott mekkora ez az érték.

A gráfok összefüggésével és többszörös összefüggésével mérhető rendszerek erőssége, biztonsága. Ilyen például a számítógépes hálózatok, városi közlekedési viszonylatok vagy éppen az energiaellátás hálózata. Amikor valamiből a legjobbat, legolcsóbbat vagy legnagyobbat keressük, akkor jön szóba a súlyozott keresési algoritmusok elmélete. A mohó algoritmus és a különböző alternáló módszerek mellett itt megjelennek olyan feladatok is, amelyeket bizonyítottan már egy számítógép sem tud kezelni. Ide kapcsolódnak a színezési

---

<sup>2</sup> [https://www.nobelprize.org/nobel\\_prizes/economics/laureates/2012](https://www.nobelprize.org/nobel_prizes/economics/laureates/2012)

feladatok is, amikor egy gráf csúcsait vagy éleit próbáljuk különböző szabályok szerint színezeni.

Hálózatok egyszerűsített leírására és tárolására is alkalmas a feszítőfák és a legolcsóbb feszítőfák keresése. A kvantumkémia egyik újszerű eredménye például (Árendás, Furtenbacher, Császár, 2016) a mélységi feszítőfák segítségével leírja egy molekula teljes energia spektrumát. Ez az eredmény kémiai vagy fizikai módszerekkel teljesen reménytelen volt.

A gráfok alkalmazásához tartozik még számos olyan terület, mint csővezetékek kapacitásainak tervezése, áruellátás biztosítása, számítógépes hálózatok kialakítása, stabilizálása stb., amelyeket ebben a munkában már nem sorolunk fel.

### 1. Kutatók és tanárok véleménye

A gráfoktatás helyzetének feltérképezésekor természetesen elengedhetetlen maguknak az oktatóknak a felkeresése. Fontosnak tartottuk a terület szakértőinek a megkérdezését. Ennek érdekében Magyarország legelismertebb, gráfelmélettel foglalkozó professzoraival beszélgettünk. Megkérdeztük az ELTE-ről Frank Andrást, Lovász Lászlót, Sziklai Pétert és Szőnyi Tamást, valamint Szegedről Hajnal Pétert. Kíváncsiak voltunk arra, hogy ők milyen bevezetési lehetőségeket tartanak célravezetőnek a gráfok oktatásában.

Összegzésként készítettünk egy táblázatot (*1. táblázat*), amelyben a gráfelmélettel foglalkozó egyetemi oktatók véleményét foglaltuk össze.

	Frank András	Hajnal Péter	Lovász László	Sziklai Péter
Fontos	✓	✓	✓	✓
Fogalmak	–	–	–	–
Modellezés	✓	✓	✓	✓
Valóságközeli feladatok	✓	✓	✓	✓
Alkalmazási lehetőségek		Kémia, órarend	GPS, internet	Közösségi oldalak
Legrövidebb út	?	–		✓
Euler	✓	✓		
Továbbképzés			✓	

1. táblázat. Egyetemi tanárok véleménye

A táblázatból jól látható, hogy valamennyien nagyon fontosnak tartják a gráfok oktatását, valamint a modellezési, és valóságközeli feladatok alkalmazását a témakörben. Az alapfogalmak sulykolását többségük nem tartja célravezetőnek.

Hajnal Péter szerint a gráfelmélet bevezetésekor nagy segítség, hogy az egyszerűbb feladatok lerajzolhatók, ezáltal a diákok könnyebben megértik őket, el tudják képzelni a problémát. Szerinte is fontos valóságközeli, érdekes feladatokat adni a diákoknak, azonban szem előtt kell tartani, hogy a valóság mindig bonyolultabb. Például jó ötletnek tartja órarendtervezéssel kapcsolatos feladatok megoldását, figyelembe véve azt, hogy a valóságban sokkal több befolyásoló tényező van, mint amennyit egy ilyen feladat keretei megengednek.

Lovász László elmondta, hogy az alkalmazások időről időre változnak. A különféle kongresszusokon mindig téma az, hogy épp az adott időben mit tekintünk matematikai alkalmazásnak. Ezek az alkalmazások folyamatosan változnak, ezért az oktatásban is állandóan frissíteni kellene őket. Ezt ő a tanárok rendszeres továbbképzésének a keretében tudja elképzelni.

Sziklai Péter izgalmas és szemléletes feladatok bemutatásával keltené fel a diákok érdeklődését a gráfelmélet iránt. Érdekesnek tartja azokat a példákat, melyekben a cél a legrövidebb út megtalálása. Ennek látványos bemutatására két modellt is javasolt. Az első esetben egy csatornahálózatot tekintünk, melyet szeretnénk vízzel feltölteni. A második javasolt szemléltetési módszer egy fagolyós Dijkstra-modell.

Szőnyi Tamás rámutatott arra, hogy a gráfelmélet csupán 1984 óta szerepel a matematika tanári képzés kötelező tantárgyai között, így akik korábban szereztek diplomát, még nem tanulták, ezért idegenkednek tőle.

Természetesen nem csak az egyetemi oktatókat kérdeztük meg. Középiskolai matematika tanárok véleményét is kikértük a gráfok tanításáról. Arra voltunk kíváncsiak, hogy mennyi időt szánnak a gráfok tanítására, mik azok a fogalmak, feladatok, amik szerepelnek az órákon, és mennyire szeretik tanítani ezt az anyagrészt. Felkerestük többek között Klacsákné Tóth Ágotát, Niházy Lászlónét, Gerőcs Lászlót, Marton Sándort és Szabó Szabolcsot. Rajtuk kívül több középiskolai tanár csak név nélkül vállalta, hogy mesél nekünk arról, hogy hogyan oktatja a gráfelméletet.

A válaszok meglehetősen sokrétűek voltak. Sokan csak az egyszerűbb feladatokig jutnak el, szerintük a gráfok egyáltalán nem fontosak ezen a szinten. Találkoztunk olyan véleménnyel is, mely szerint annyira egyszerű a gráfelmélet, hogy azt a diákok otthon, egyedül is fel tudják dolgozni. Beszélgettünk több olyan tanárral, akiknél egyáltalán nem szerepelnek gráfok. De

természetesen több olyan beszámolót is hallhattunk, akik kihasználják a kerettanterv nyújtotta lehetőségeket, és igyekeznek minél többet bemutatni a diákoknak a gráfok színes világából.

Összegzésként elmondhatjuk tehát, hogy a középiskolai tanárok véleménye igen változatos, de néhány pontban többségük egyetért. Ide sorolható az időhiány, valamint az, hogy érettségig alig szerepelnek gráffal kapcsolatos feladatok, így más tananyagot fontosabbnak tartanak. Mindannyian hangsúlyozták, hogy az alapok nem túl nehezek, és ha lenne rá több idő, akkor hasznos lehetne az oktatásuk.

## 2. Bevezetési lehetőségek

Az eddigi kutatási eredményeink figyelembevételével a középiskolai gráfelmélet oktatásának egy új felépítésére tettünk javaslatot. Célunk annak megmutatása, hogy létezik olyan felépítés, módszer, amely megfelel a matematikusok által támasztott igényeknek, a tantervi céloknak, és egyúttal nem állítja megoldhatatlan nehézségek elé azokat a tanárokat sem, akik a témával nem foglalkoztak egyetemi tanulmányaik során.

Két merőben különböző téma segítségével dolgoztuk ki bevezető feladatsorainkat. Ezek kiválasztásakor fontosnak tartottuk, hogy minél közelebb álljanak a diákok mindennapjaihoz. Célunk felhívni a diákok figyelmét arra, hogy a gráf nemcsak kötelező tananyag, hanem egy olyan eszköz is, amelyet indirekt módon szinte mindig alkalmazunk a hétköznapokban. Ennek megfelelően valóságához közeli, gyakorlatias feladatok kidolgozására törekedtünk.

A két fő témakör, amelyek köré a feladataink épülnek, a facebook, valamint a közlekedés Budapest tervezett metróhálózat-térképének segítségével, melyekhez kapcsolódó példák nagyon jól szemléltethetők gráfokkal. Mindkettő segítségével bevezethetők a gráfelméleti alapfogalmak, amiket érdekes és változatos feladatokon keresztül ismerhetnek meg a diákok. Nagy előnyük az eddigi feladatokhoz képest, hogy közvetlenül mutatják meg a gráfok alkalmazási lehetőségeit.

### 2.1 Útvonaltervezés

A gráfelmélet egyik, napjainkban talán leggyakrabban használt területe a legrövidebb út keresésének problémája. Ennek oktatását több, általunk megkérdezett középiskolai tanár és egyetemi professzor a középiskoláskorál jóval magasabb szintűnek tartja. Véleményünk szerint azonban megfelelő rávezetéssel egy középiskolás is el tudja sajátítani az algoritmus használatát.

A legrövidebb út keresésére szolgáló algoritmusok közül legfontosabbnak a Dijkstra-algoritmus tekinthető. Ugyanis ez alapján a módszer alapján működnek az útvonaltervező programok és a GPS-ek is. A Dijkstra-algoritmus egy gráf adott csúcsából az összes többi csúcsba vezető legrövidebb utat keresi. Az algoritmus bemutatására készítettünk egy feladatot, melyben Budapest tömegközlekedését használva kell legrövidebb utat keresnünk.

A teljes feladatsorok az alábbi linken találhatóak meg:

[http://www.cs.elte.hu/~csaba/tdk/hungaricum\\_otdk.pdf](http://www.cs.elte.hu/~csaba/tdk/hungaricum_otdk.pdf)

## 2.2 Gyakorlat

Természetesen egészen idáig ez egy elméleti kutatás volt csupán. A reguláris tanórai kipróbálást két próba előzte meg.

Először az Árpád Gimnáziumban, az Árpád napok keretében kaptunk lehetőséget feladatsoraink kipróbálására. A 90 perces interaktív előadásunkon matematika iránt érdeklődő, lelkes diákok vettek részt. Az előadás során összesen 10 feladatot sikerült a diákokkal közösen megoldanunk. A 10 feladat közül 7 a facebook, 3 pedig a metró témaköréből került ki. Ezek után együtt végigcsináltuk az útvonaltervezős feladatot is. Ahogy az várható is volt, a gyerekek végig nagyon aktívak voltak, könnyű volt velük együtt dolgozni, a feladatokat ügyesen megoldották.

Ezek után a Budapesti Gazdasági Egyetemen kaptunk újabb lehetőséget. OKJ-s képzésben részt vevő elsőéves web-programozó szakosoknak tartottunk két 90 perces gyakorlatot. A gyakorlatok során mindkét témakörből 10–10 feladatot oldottunk meg, és természetesen sor került az útvonaltervezéses feladatra is. Nekik már több gondot okoztak a feladatok. Ezek az órák sokkal közelebb álltak a reguláris tanórákhoz, sokat segítettek abban, hogy tudjuk, mire is számíthatunk majd.

## 2.3 Négy gráfelméleti óra a gyakorlatban

Feladatsorainkat az eddigi tapasztalataink alapján átdolgoztuk és javítottuk, mielőtt tanórai keretek közé kerültek. Majd ezeket ősszel a Városmajori Gimnázium és Kós Károly Általános Iskolában, egy 9-es, nyelvi előkészítő osztályban próbáltuk ki. Mivel ez egy nulladik évfolyam, ezért nekik a nyelvóráikon kívül csak testnevelés, informatika és heti másfél óra matematikaóra szerepel az órarendjükben. Ebben az évben a matematikaórák célja az általános iskolás tananyag ismétlése, az esetleges hiányosságok pótlása, valamint az eddigi ismeretek szinten tartása. A 17 diák Budapest különböző általános iskoláiból érkezett, nagyon különböző tudásszinttel. Saját vallomásuk szerint többen nem érdeklődnek, és nem is szeretik a

matematikát; ugyanakkor a csoportban olyan diák is van, aki ért már el eredményeket matematikaversenyen. A csoport nagyon fegyelmezett és szorgalmas. A tanmenetük 4 órát szán gráfok oktatására, ezt próbáltuk a lehető legjobban kihasználni.

Mivel teljesen új anyagrésszel kezdtünk el foglalkozni, ezért az első óra jellemző munkaformájának az egyéni és frontális munkaformát választottam. Ezt fokozatosan váltotta fel a pármunka. Két fő oktatási célt tűztem ki, egyik természetesen a gráffal kapcsolatos alapfogalmak (csúcs, él, foksám, teljes gráf, párhuzamos él, hurokél, egyszerű gráf) elsajátítása volt, míg a másik fő cél kezdetben az egyszerűbb, majd egyre összetettebb gráfok szemléltetése volt. Elsődleges nevelési célnak a diákok esztétikus munkára való igényének kialakítását gondoltam. A második órától kezdődően a pármunka megjelenésével a közösségi nevelést, valamint a közös munkában való hatékony részvételre nevelést is célul tűztem ki. A képzési célok közül a legfontosabbnak érzem, hogy a gyerekek meglássák a matematika alkalmazását a mindennapi életben. Nem titkolt célom ezzel az volt, hogy felhívjam a diákok figyelmét arra, hogy a gráfok nem csupán kötelező tananyag, hanem olyan eszköz is, amelyet indirekt módon szinte mindennap használunk.

### *2.3.1 Első és második óra*

Az első óra típusa új ismereteket szerző óra volt, hiszen a csoport tagjai még sosem találkoztak korábbi tanulmányaik során, vagyis az általános iskolában gráfokkal. Az óra első négy percében ráhangolódás gyanánt a facebookról beszélgettünk a diákokkal. Mielőtt elkezdtük, fel kellett mérnem, hogy mennyire használják a facebookot. Kiderült, hogy a gyerekek kivétel nélkül naponta használják. Annak ellenére, hogy ennyire rutinosan mozognak a közösségi hálón, fontosnak tartottam, hogy tisztázzuk a facebookkal kapcsolatos kifejezéseket. Erre azért van szükség, mert a definiálás után ezekkel a fogalmakkal absztrakt módon lehet már dolgozni. Megbeszéltük tehát, hogy a feladatok során ismerős, ismeretség alatt természetesen mindig azt értjük, hogy az illetők facebookon egymás ismerősei. A feladatok kapcsán a facebook egy jelentős funkcióját, a megosztást fogjuk használni. Erről azt kell tudni, hogy ha egy felhasználó megoszt valamit a facebookon, akkor azt csak az ismerősei láthatják, és a feladatokban feltesszük, hogy látják is. A megosztás szóval definiáltuk egy adott csúcs szomszédjainak a halmazát, így a matematikai fogalmakat olyan szavakkal helyettesítettük, amelyeket ismernek és használnak.

Rövid bevezető után a diákok megkapták a facebook-os feladatsort, és önállóan elkezdték megoldani az első feladatot, melyben megadott ismeretségeket kellett ábrázolniuk.

Az 1. feladat szövege: *Rajzszakkörre Anna, Betti, Csaba, Dani, Eszter és Fanni jár. Ábrázoljuk az ismeretségeket, ha tudjuk, hogy:*

- a) *Anna és Csaba ismerősök facebookon. Csabának még Eszter és Dani ismerőse a csoportból. Betti rajzszakkörös ismerősei Fanni és Eszter. Több ismeretség nincs.*
- b) *Betti ismeri Annát és Fannit. Eszter ismerősei Csaba és Dani, akik még egymásnak is ismerősei.*
- c) *Betti mindenkit ismer facebookon, Eszter csak a lányokat. Ezen kívül Csaba és Dani is ismerik egymást, valamint Anna és Fanni.*
- d) *Betti mindenkit ismer facebookon, Eszter csak a lányokat, Csaba csak a fiúkat. Ezen kívül Anna és Fanni ismeri még egymást.*
- e) *A lányok mind ismerősei egymásnak a facebookon, hasonlóan a fiúk is bejelölték egymást, de fiú-lány ismeretség nincs.*
- f) *Minden lánynak minden fiú ismerőse facebookon, de a lányok nem jelölték be egymást, és a fiúk között sincs ismeretség.*
- g) *Anna, Betti, Csaba, Dani, Eszter és Fanni ismerőseinek a száma rendre:*

I. 5, 1, 4, 3, 3, 2

II. 5, 5, 1, 3, 3, 2

III. 5, 1, 4, 3, 3, 3

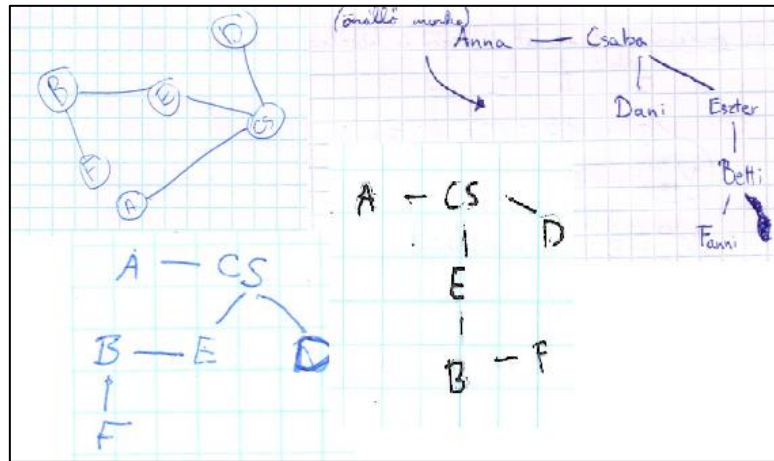
IV. 4, 4, 3, 3, 2, 1

V. 5, 3, 3, 2, 2, 1

VI. 6, 3, 2, 2, 2, 1

Először adtam egy kis gondolkodási időt, kíváncsi voltam, hogy hogyan kezdik el maguktól ábrázolni az ismeretségeket, ha tudjuk, hogy ki kinek az ismerőse. Mivel életükben ekkor találkoznak elsőként ilyen problémával, ezért nagyon fontosnak tartom, hogy először önállóan gondolkodjanak. A diákok többsége nagyon gyorsan nekilátott az ábrázolásnak. Sokan úgy csinálták, hogy a feladat szövege alapján sorban haladva írták fel a gyerekek neveit, és kötötték össze őket. Ilyen módon helyesen megoldott példák láthatók az *1. ábrán*.





1. ábra Az első gráfok

Számomra meglepő volt, hogy a csoport többségének ennyire egyértelmű és természetes volt, hogy a megoldást gráffal ábrázolják úgy, hogy a csúcsok az emberek, és az élek pedig a köztük lévő ismeretségek. Voltak néhányan, akik nem tudtak nekikezdeni a feladatnak, nekik segítségül felrajzoltam a táblára a hagyományos elrendezésben, vagyis ABC-sorrendben, illetve kör alakban elhelyezve a gyerekeket, és megbeszéltük, hogy hogyan lehet jelölni az ismeretségeket, de a táblán ekkor én még nem húztam be az éleket, helyette újabb gondolkodási időt kaptak. Mikor mindenkinek kialakult a füzetében egy többé-kevésbé helyes ábra, akkor egy olyan diákot hívtam ki a táblához, akinek hibátlan megoldása volt, hogy mutassa meg a többieknek.

Az ábrákról is látható tehát, hogy a csúcsok sokféle elrendezése lehetséges, ezekről mi, tanárok egy pillanat alatt el tudjuk dönteni, hogy helyes-e, vagy sem. Hiszen csak azt kell megnéznünk, hogy a megfelelő élek vannak-e behúzva.

Ezután az 1-es feladat b) és c) részét tűztem ki a diákoknak, szintén először önálló gondolkodásra, majd egy-egy diák felrajzolta a táblára a helyes megoldást.

Az első három részfeladat után mondtam ki a gráf definícióját, amit a diákok a füzetükbe beírtak. A definíció után visszatértünk a c) részhez, és megbeszéltük, hogy nemcsak összefüggő gráfok léteznek, hanem a több tagból álló konstrukciókat is gráfoknak nevezzük. A komponens fogalmát azonban nem vezettem be, hiszen ez egy olyan idegen szó, amely az alkalmazáscentrikus gráfoktatásban ezen a szinten felesleges, sőt zavaró is lehet.

Az 1. feladat d) részét is az eddigiekhez hasonló módon oldottuk meg, itt azonban nincs megoldása a feladatnak. Ez nem okozott különösebb gondot a diákoknak, hiszen könnyen meg tudták indokolni, hogy a problémát az okozza, hogy míg az egyik feltétel szerint Betti mindenkit

ismer, addig Csaba csak a fiúkat ismeri, ami nyilván ellentmondás, hiszen az ismeretségek kölcsönösek.

Ezután a feladat g) részére ugrottunk, ahol már adott fokszámsorozathoz kellett a tanulóknak a megfelelő gráfot lerajzolniuk. Ez már bonyolultabb, mert nem mondtuk ki a konkrét éleket, csak azt, hogy melyik csúcsból hány él indul ki. A II. után mondtam ki a fokszámok definícióját. Ez a rész sem okozott semmi problémát, a gyerekek ügyesen bántak az ábrákkal. Sem a II., sem a III. fokszámsorozathoz nem létezik a gráf. Előbbit könnyen megtudták indokolni a diákok: mindenki látta, hogy a két ötfokszámú csúcs után mindenkinek legalább kettő lesz a fokszáma, így ez a fokszámsorozat nem megvalósítható. A g) III. viszont okozott egy kis fejtörést számukra. A feladatot az előzőekhez hasonlóan próbálták megoldani. Mivel a feladatban szándékosan úgy írtam le a fokszámokat (nem növekvő sorrendben), hogy látszódjon, hogy a megoldás egyértelmű, ezért mindenki önmagától rájött arra, hogy ilyen gráf nincs. Észrevették, hogy Fanninak hiányzik egy ismerőse, ám ha megpróbálunk F-ből még egy élt indítani, azt már nem tudnánk befejezni, hiszen másnak már nem hiányzik ismerőse. Mivel ez ilyen gyorsan ment, elhatároztam, hogy rögtön rávezetem őket a fokszámok összegére vonatkozó tételre. Frontálisan bizonyítottuk, úgy, hogy hagytam, hogy ők mondják ki a kulcsmondatokat és kulcsgondolatokat. Olyan gyorsan mondták be, hogy időm sem volt megszámlálni, hányan jöttek rá maguktól. Bebizonyítottuk tehát, hogy az ismerősök számának az összege biztosan páros, hiszen minden ismeretséget kétszer számoltunk. Egyetlen diáknak sem okozott problémát ezután ezt „gráfnyelvre” lefordítani, vagyis hogy egy gráfban a fokszámok összegének mindig párosnak kell lennie, hiszen ez az összeg pontosan az élék számának kétszeresével egyezik meg.

Az első feladat kimaradó részeit, vagyis az e), f), valamint a g) IV–VI. részeit szorgalmi házi feladatnak adtam fel. A csoport 17 diákjából 12-en csinálták ezt meg otthon. Közülük többen maximális pontszámot kaptak rá, ám négyen ott vesztek pontot, hogy a g) részben hiányoztak az indoklások. A gondolatok elmondása, érvelések és indoklások megfogalmazása a továbbiakban is problémát okozott a diákoknak.

Az első feladatra az órán összesen 15 percet szántam, végül 18 perc ment el vele. Azt gondolom, hogy nem szabad sajnálni az időt erre a feladatra, hiszen ez kiválóan alkalmas arra, hogy a diákok mélyebben megismerjék a gráfokkal kapcsolatos alapfogalmakat. Rajzolgatva tapasztalják meg, hogy mi a csúcs, az él és a fokszám. Mint később látni fogjuk, a tapasztalásra szánt idő kifizetődik, a későbbi feladatokat is gyorsan és jól oldják majd meg.

Az óra további részében a feladatsor további 5 feladatát oldottuk meg, amelyek során a frissen megismert fogalmakat és tételeket kellett használni. Előkerültek olyan feladatokat is,

amelyben 30 csúcsú gráfokkal kellett dolgozni. Egy ilyen sok csúcsból álló gráf csúcsainak a lerajzolása már nagyon sok időt venne el. A nagy szám azt sugallja, hogy általános konstrukciót kell adnunk a megoldáshoz. A gyerekeknek ez sem okozott gondot, könnyen átlátták a feladatot lerajolás nélkül is. Az óra során bevezettük a teljes gráf, a párosítás és a páros gráf fogalmát. A második óra elején a házi feladat megoldásakor, illetve az óra folyamán, belső tantárgyi koncentráció is belép az eddigi külsőkön kívül. Ez a skatulya-elv megjelenése, ami sajnos problémát jelentett a diákok többségének. Az óra első felében az előző órán kiosztott facebookos feladatsorral dolgoztunk, majd minden diák kézhez kapta az új metrós feladatsort, illetve az azon lévő feladatok megoldásához szükséges, a 2. ábrán látható térképet, amely Budapest tervezett metróhálózatát jeleníti meg.



2. ábra. Budapest tervezett metróhálózata

A színes térkép nagyon felkeltette a diákok érdeklődését, lelkesen álltak neki a tanulmányozásának. Az óra célja elsősorban az előző órán tanult fogalmak és tételek átisméltése, valamint elmélyítése volt a másik témakör segítségével. Az órán új ismeretként lépett be a párhuzamos élek fogalma, valamint a teljes gráf éleinek száma, kétféle megközelítés segítségével.

### 2.3.2 Harmadik óra

A harmadik órán tovább haladtunk a metrós feladatokkal. Ezen az órán került sor a következő feladatra: „*A Lehel-téren betörték egy bankba. A rendőrök üldözőbe vették a bankrablót, aki a metróba menekült. Úgy próbálta megtéveszteni a rendőröket, hogy néhányszor átszállt, és másik metróval folytatta útját. Ha egy metrószakaszon már utazott a rabló, akkor azt már figyelik a rendőrök, így nem tud újra azon utazni. Amíg tudott, lent maradt a metróban. Amikor már nem volt más lehetősége, kijött a metróból. A rendőrök már a kijáratnál várták. Hol kapták el a bankrablót?*”.

Körülbelül 1 perc gondolkodási idő után megkérdeztem őket, hogy van-e valakinek ötlete arra, hogyan álljunk neki a feladatnak. Nem volt ilyen ötlet. Elmondtam nekik, hogy ez valóban egy nagyon nehéz feladat, és szeretnék nekik segítségül megmutatni egy példát, ami ugyanerre a problémakörre vezet vissza. Azt gondolom, hogy a gráfok oktatása eddig sem, és ezután sem telhet el anélkül, hogy a gyerekek ne ismerkedjenek meg az Euler által megoldott nagyon híres matematikai problémával, a Königsbergi hidak problémájával. Fontos megmutatnunk, hogy a gráfelmélet a matematikatörténetnek is egy igen jelentős, ám fiatal fejezete. Én csupán a problémát ismertettem velük, valamint készítettem egy szemantikusat térképet a táblára, amelyen a 7 híd elrendeződése látszik. A gráffal való szemléltetést már közösen oldottuk meg. Nagyon tetszett a gyerekeknek az együtt gondolkodás, kis segítséggel több tanuló is rájött a dolog nyitjára. Miután mindenki megértette az Euler-kör lényegét arra kértem őket, hogy most ennek ismeretében térjenek vissza a mi feladatunkhoz. A gyerekek lázasan elkezdtek gondolkodni, de egyelőre nem sokra jutottak. Ezek után azt javasoltam nekik, hogy a csomóponti gráfot lapozzák fel a füzetükben, azon egyszerűbb dolguk lesz. Ezután némi zavart a párhuzamos élek okoztak, de ezt is könnyen tisztáztuk. Végül több párnak is kijött a helyes megoldás, vagyis az, hogy a rendőrök az Oktogonon várták a rablót. Volt azonban néhány pár, akiken látszott, hogy ez a rész még nem teljesen tiszta, úgyhogy a gyors megfejtőkkel még egyszer elmondattam a megoldás menetét. Látszólag mindenkit sikerült meggyőznünk. Fontosnak tartottam kihangsúlyozni az óra végén még egyszer, hogy ez valóban nem egy könnyű feladat, ne ijedjenek meg, ha nem volt mindenkinek elsőre egyértelmű. Pont a nehézsége miatt gondolom azt, hogy ez a feladat remek lehetőséget ad a tehetségek kiszűrésére a csoportunkból. Ha egy diák minden előismeret nélkül önállóan meg tudja oldani ezt a feladatot, akkor egészen biztosak lehetünk abban, hogy az adott tanuló rendkívüli képességekkel rendelkezik. Fontos azonban azokra a diákokra is jobban odafigyelni, akiknek az Eulerről szóló történet után egyből meglesz a megoldás.

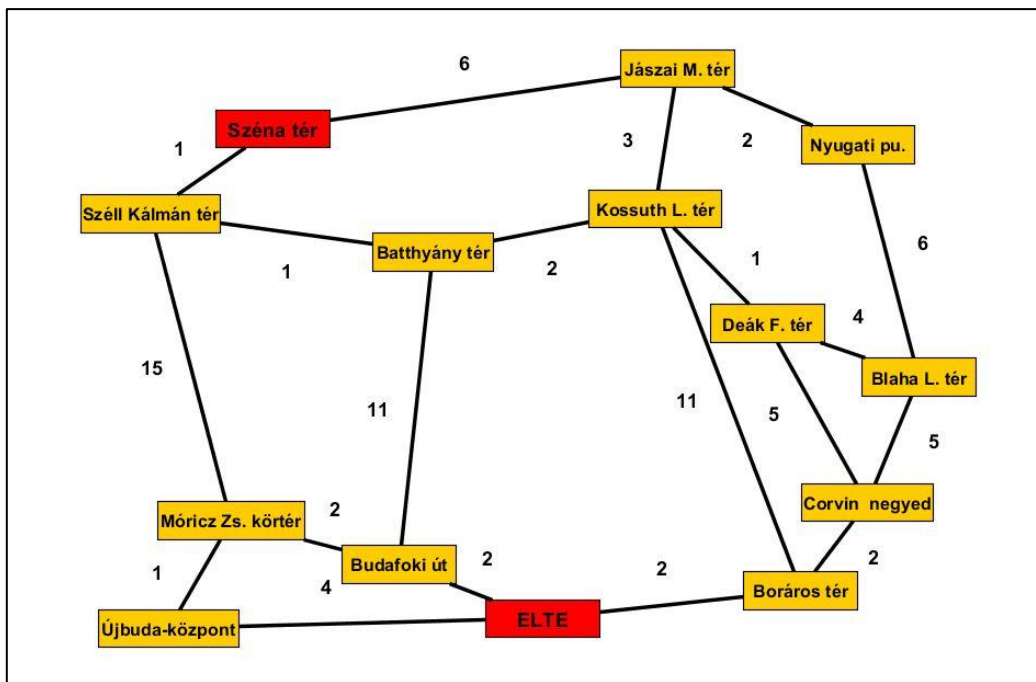
## 2.3.3 Negyedik óra

1. ábra Az első gráfok Utolsó gráfelméleti óránkon az útvonalkereséses feladat került sorra. Miután az előző órákon együtt dolgozó párok ismét összeültek, kiosztottam számukra a 3. ábrán látható budapesti térképrészletet:



3. ábra. Budapest térkép

A diákokat arra kértem, hogy segítsenek nekem megtalálni azt az utat, amelyen óra után a leggyorsabban eljuthatok az ELTÉ-re. Segítségül a térképen feltüntettem hét tömegközlekedési eszköz útvonalát, és az átszállási lehetőségek közti menetidőket. Első lépésként tisztáztuk, hogy melyik szín mely tömegközlekedési eszközt jelenti (sárga: 4-6-os villamos, piros: 2-es metró, lila: 2-es villamos, kék: 86-os busz, világoskék: 3-as metró, zöld: 18-as villamos). Első feladatuk az volt, hogy a térkép alapján próbálják kitalálni, mennyi időre van minimum szükségem, hogy odaérjek. Többen is rátaláltak a 14 perces legrövidebb útra, ám ekkor még nem árultam el nekik, hogy valóban ez lesz a leggyorsabb. Megbeszéltük, hogy ugyan már maguk az útvonalak és a megállók egy gráfot alkotnak, de még könnyebbé tehetjük a dolgunkat, ha a 4. ábrán látható gráffá rajzoljuk át a térképünket.



4. ábra. Átrajzolt gráf

Ezt az átrajzolt gráfot szintén kiosztottam nekik, hiszen az átrajzolás nem egy komoly feladat, viszont nagyon sok értékes idő ráment volna az órából. Az algoritmus lényegét leegyszerűsítve mondtam el nekik az ismeretlen gráfelméleti fogalmak (pl. *részgráf*) említése nélkül. Azt természetesen nem várhatjuk el a diákoktól, hogy egyből megértsék és alkalmazni is tudják az algoritmust, tehát ezután készítettünk egy táblázatot, melynek első sorába az átszállási lehetőségek nevét tüntettük fel, és közösen elkezdtük a táblázat kitöltését.

Abban a reménykedve, hogy az első három lépés elég volt számukra, hogy az algoritmus lépéseit megértsék, arra kértem őket, hogy a negyedik lépéstől párokban folytassák az eljárást. Természetesen továbbra is bármikor kérdezhetnek. A kérdésekből kiderült, hogy túl gyorsan magukra hagytam őket, ezért pár perc gondolkodás és próbálkozás után inkább együtt folytattuk tovább. Sajnos az idő rövidege miatt végül az egész algoritmust közösen csináltuk végig, igyekeztem azonban ügyelni arra, hogy mindenki szóhoz jusson. Nagyon nagy élmény volt látni számomra a diákok olyan szintű lelkesedését, amivel az eddigi órákon még nem találkoztam. Kivételesen mindenki élvezettel követte a lépéseket, töltötte a táblázatot és színezte a gráfot. Örültek annak is, hogy beigazolódott a sejtésünk, valóban a leggyorsabban a Széna tértől úgy juthatunk el a Petőfi híd budai hídfőjénél található ELTE épületeihez, ha a Széna térről 4-6-os villamossal átmegyünk a Széll Kálmán térre, ahonnan 2-es metróval a Deák térre, majd 3-as metróval a Corvin negyedhez jutunk. Itt újra 4-es 6-os villamosra szállva eljutunk a célig. Az összesen eltelt idő tehát 14 perc.

Ezen az útvonalon így végig olvasva jót mosolyogtunk közösen, hiszen most csak a tényleges utazási időkkel számoltunk, nem vettük figyelembe az átszállási és várakozási időket. Márpedig ez nagyon fontos lehet, hiszen az előbb megtalált leggyorsabb útvonal 3 átszállást tartalmaz, amely 3 gyaloglással és várakozással jár együtt. Megkérdeztem a diákokat, hogy van-e arra esetleg valami ötletük, hogyan tudnánk jelölni az átszállásokat. Az teljesen világos volt számukra, hogy a csomópontokban találkozó éleket kellene valahogy széthúznunk. Arra is sikerült közösen rájönniük, hogy úgy kell ezt megvalósítanunk, hogy továbbra is keresztezen minden él minden élt, de minden metszéspont fokszáma csak kettő legyen. Maga a technikai megvalósítás azonban már nehéz volt számukra, így azt én mutattam meg nekik.

Ha az eredeti gráfban szeretnénk jelölni az átszállásokat, illetve egy átszállást átlagosan 4 percnél számolunk, akkor egy igen bonyolult gráfot kapunk. Ezt is megmutattam a diákoknak, és bár mondtam, hogy szeretettel várom ebben az esetben is a leggyorsabb utat, erre egyelőre nem kaptam megoldást...

Azt gondolom, hogy bár valóban nem könnyű ez az algoritmus egy 9. osztályos tanulónak, a célomat, vagyis azt, hogy kicsit belelássanak a gráfok, illetve a komolyabb matematika világába, és felkeltsem az érdeklődésüket, sikerült elérnem az óra végére.

#### *2.3.4 Röpdolgozat*

A röpdolgozatban azt szerettem volna felmérni, hogy a diákoknak mennyire sikerült az elmúlt négy tanórán elsajátítaniuk a középszintű matematika érettségi gráf témaköréhez szükséges ismereteket, eljárásokat. Ezért a dolgot elsősorban érettségi példákából állítottam össze, és majd később látjuk, hogy a kísérlet kedvéért beletettem egy versenyfeladatot is. Első lépésben összegyűjtöttem az elmúlt évek középszintű érettségi gráfokkal kapcsolatos feladatait. Több olyan feladatsor is volt, amely egyáltalán nem tartalmazott ilyen típusú példát. A felbukkanó feladatok kivétel nélkül a kerettanterv által megfogalmazott minimális követelményeket, vagyis az alapfogalmak ismeretét mérik fel. Ezen alapfogalmak a csúcs, az él, a fokszám, valamint a fokszámok összege és az élek száma közötti összefüggés. A feladatok megfogalmazása hasonló az általam megvizsgált tankönyvek feladataihoz, megfelel a szaknyelvnek és az életkori sajátosságoknak is. A dolgot példáinak kiválasztásánál arra törekedtem, hogy minden alapfogalom előkerüljön, a lehető legváltozatosabb formában, és minél inkább lefedje az eddigi vizsgákon előforduló feladattípusokat. Így esett a választásom három darab feladatra, amelyek közül az első kettő az érettségik első, míg a harmadik a vizsga második részéből került ki.

A röpdolgozat pontozásában az érettségi feladatok esetében az eredeti pontszámokat használtam, a javítást a hivatalos javítási-értékelési útmutatók alapján végeztem. Ez a pontozás nem az, ami a matematikai gondolkodást a lehető legjobban kifejezi, azonban fontosnak tartom, hogy a gyerekek akár már 9. osztályban lássák és megismerjék, hogy mit várnak el tőlük a végső számonkérésen. Legfontosabbnak a pontos és érthető indoklás elsajátítását gondolom. Az órák során is kiderült számomra, hogy ez több diáknak is nehezen megy, hiába érti a kérdést, és tudja is a választ, nagyon nehezen tudja ezt megmagyarázni, főleg helyes matematikai kifejezésekkel.

Az utolsó, az egykori versenyfeladat eredetileg 10 pontot ért. Mivel a három érettségi feladat pontjainak összege 17, ezért úgy gondoltam, hogy a negyedik feladat pontszámát csökkentenem kell. Mivel túlmutat a követelményeken, nem szerettem volna, hogy a dolgozat összpontszámának több mint a harmadát ez tegye ki. A feladat pontszámát így 6 pontra csökkentettem. Mind a két részfeladat 33 pontot ér, 1–1 pontot a jó megoldásra, valamint 2–2 pontot a helyes és precíz indoklásra lehet megszerezni.

A dolgozat összpontszáma így tehát 23 volt. A dolgozatban ott voltak az elérhető pontszámok, a diákok láthatták tehát, hogy melyek a hangsúlyosabb, nagyobb arányban számító feladatok, illetve feladatrészek.

A dolgozat megírására 20 percet szántam. Menet közben a haladást figyelve azt láttam, hogy folyamatos érdemi munka mellett a gyengébb és erősebb tanulók esetében sem elég ennyi idő. Így 5 perccel meghosszabbítottam a rendelkezésükre álló időt. A 17 tagú csoportból 15-en írták meg a dolgozatot (ketten hiányoztak). A legtöbb fejtörést a dolgozat közben, ahogyan az várható is volt, az utolsó feladat okozta a tanulóknak. A számomra feltett kérdésekből az derült ki, hogy nagyon erősen támaszkodnak az előző órákon feldolgozott feladatokra, és azon dolgoznak, hogy az egyes feladatokat megfeleltessék a már ismert példáknak.

A dolgozat eredményeit az alábbi (2.) táblázatban foglaltam össze:

	0 pont	1 pont	2 pont	3 pont	4 pont	5 pont	6 pont	7 pont
<b>1. feladat (3 pont)</b>	-	-	-	<b>15</b>				
<b>2. feladat (4+3 pont)</b>	-	-	-	-	-	-	<b>3</b>	<b>12</b>
<b>3. feladat (4+3 pont)</b>	<b>1</b>	-	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>2</b>	<b>7</b>
<b>4. feladat (3+3 pont)</b>	<b>3</b>	-	<b>5</b>	<b>3</b>	<b>1</b>	-	<b>3</b>	

**2. táblázat. Röpdolgozat eredményei**



A táblázatból jól látszik, hogy az első feladatot mindenki kivétel nélkül hibátlanul oldotta meg. A második feladat a) és b) része is szintén nagyon sikeresnek mondható, hiszen csupán három diák vesztett 1–1 pontot a b) részben. A harmadik feladat már közel sem volt annyira sikeres, mint az előző kettő, hiszen itt már volt, akinek egy-egy részfeladat 0 pontosra sikerült, egy diáknak pedig az egész feladat 0 pontos lett. Az a) részben a fő problémát várakozásaimnak megfelelően a pontos és helyes indoklás hiánya okozta. Nagyon érdekesnek tartom, hogy mind itt, mind pedig a második feladat b) részében is elenyésző azon diákok száma, akik csupán a grafikus megoldásra támaszkodva adnak választ. Ennek oka talán a gráf témakörben való jártasságuk hiánya; úgy tűnik, sokkal nagyobb biztonságot ad számukra egy konkrét algebrai számolás, mint egy ábráról való leolvasás. Azt gondolom, hogy ez a bizonytalanság teljesen érthető, 4-szer 45 perc nem elég, arra hogy egy teljesen új anyagrészben biztonsággal tudjanak mozogni. Ezért is okoz nehézséget, hogy a kerettanterv ilyen kevés órát szán gráfok oktatására.

Nem meglepő módon az utolsó feladatnál vesztették a diákok a legtöbb pontot. Hibátlan megoldást csupán három gyerek írt le, azonban a táblázatból is jól látszik, hogy nagyon sokan, nyolcan meg tudták adni a helyes megoldást.

Elmondhatjuk, hogy nagyon jól sikerültek a dolgozatok, hiszen az érettségi feladatokat hat diák hibátlanul oldotta meg, komoly hiányosság sehol sem mutatkozott. A legtöbb pontvesztés láthatóan nem a megértés hiányából, hanem a már többször emlegetett problémából, az indoklás nehézségeiből származott. Ez pontosan az a része a matematikának, amely egyáltalán nincs témakörhöz kötve, hiszen minden egyes anyagrésznél jól fejleszhető, sőt fejlesztendő, természetesen az adott téma sajátosságaihoz illesztve. Ezek a tanulók még csak most kezdik a gimnáziumot, az érettségi még messze van, addigra nyilván elsajátítják.

### **3. Összegzés**

Összességében azt gondolom, hogy sikerült teljesíteni a kerettantervben leírt elvárásokat. Ezt jól mutatják a röpdolgozat középszintű érettségi feladatainak eredményei. A diákok visszajelzéseiből kiderült, hogy nem csak megtanulták a tananyagot, hanem élvezték is az órákat, különösen tetszettek nekik a feladatok, életszerűnek és érdekesnek találták azokat.

Számomra is öröm volt nézni, ahogy lelkesen gondolkodnak, különösen a pármunka volt hatékony. Legnagyobb sikernek a diákok „aha-élményeit” éreztem, például az utolsó órán, az útvonalkeresésnél.

Az eredmények és visszajelzések alapján úgy gondolom, hogy ez a felépítés megfelel a matematikusok által támasztott igényeknek, a tantervi céloknak és nem utolsó sorban a diákok életkori sajátosságainak.

A röpdolgozatok jó eredményei láttán felmerülhet a kérdés, hogy középiskolás szinten tovább tudunk-e lépni tartalmilag. Ezzel kapcsolatban kikértem Héger Tamás véleményét, aki elsőéves matematika szakos hallgatóknak tart véges matematika gyakorlatot. Elmondta, hogy ők ezt a témakört három darab kilencven perces gyakorlaton dolgozzák fel, természetesen mélyebben érintve a fogalmakat és a tételeket. Véleménye szerint a továbblépés már túl nagy ugrás lenne, amit nem javasol középiskolában.

#### BIBLIOGRÁFIA

- Dieter, J. (2013). *Graphs, networks and algorithms*. Berlin Heidelberg: Springer Verlag. DOI: [10.1007/978-3-642-3227-5](https://doi.org/10.1007/978-3-642-3227-5)
- Lovász, L. (1999). *Kombinatorikai problémák és feladatok*. Budapest: Typotex Kiadó.
- Árendás, P., Furtenbacher, T., and G. Császár, A. (2016). On Spectra of Spectra. *Journal of Mathematical Chemistry*. Vol. 54. Issue 3. pp. 806-822.
- Csányi, P., Fábíán, K., Szabó, Cs. and Szabó, Zs. (2015). Number theory vs. Hungarian high school textbooks : the fundamental theorem of arithmetic. *Teaching mathematics and computer science*. Vol. 13. issue. 2. pp. 209-223. DOI: [10.5485/TMCS.2015.0397](https://doi.org/10.5485/TMCS.2015.0397)
- Csányi, P., Fábíán K., Szabó, Cs., Szabó, Zs. and Vásárhelyi, É. (2016). Number theory vs. Hungarian highschool textbooks:  $\sqrt{2}$  is irrational. *Teaching mathematics and computer science*. Vol. 14. issue. 2. pp. 139-152. DOI: [10.5485/TMCS.2016.0416](https://doi.org/10.5485/TMCS.2016.0416)
- Pissarides, C. (2000). *Equilibrium Unemployment Theory* (2nd ed.). Massachusetts: Institute of Technology.
- Prömel, H. J., Steger, A. (2002). *The Steiner tree problem. A tour through graphs, algorithms, and complexity*. Advanced Lectures in Mathematics. H.n.: Vieweg+Teubner Verlag. DOI:[10.1007/978-3-322-80291-0](https://doi.org/10.1007/978-3-322-80291-0)

*KOVÁCS, VERONIKA*

A MODERN INTRODUCTION TO GRAPHS IN SECONDARY EDUCATION

*Graph theory is a fastly developing area of mathematics and is present in our everyday life. The internet and navigation systems can be modelled with graphs as well as the connection of braincells or human connections. In Hungary in 1984. graph theory was not part of the curricula for math teacher students, now it is a part of the highschool final exam. In our work we propose a way to teach graph theory in highschool. We planned a material based on the suggestions of researchers of the area. We taught the material in grade 9 and as a verification we put together a test for these pupils consisting of the final exam problems.*

