



Hiszterézises hődiffúziós probléma megoldása multigríd módszerrel

Jancskár I., Iványi A.

University of Pécs, Department of Information Technology, H-7624 Pécs, Rókus u. 2.

ÖSSZEFOGLALÁS

Tranziens hővezetési problémák numerikus megoldása véges differenciák módszerével, hőmérséklettől függő diffuzivitást feltételezve nagyobb mértékű felbontás esetében igen jelentős memória és CPU idő felhasználással jár. Implicit diszkretizálási sémát alkalmazva a diffuzivitás hőmérséklet függése miatt a hőmérsékletmező meghatározása minden egyes időlépésben iterációt igényel. Kihhasználva a multigríd technika adta lehetőségeket, olyan hierarchikus algoritmust mutatunk be, mellyel a futási idő jelentősen lerövidíthető. Összehasonlító vizsgálatokkal elemezzük a javasolt módszer alkalmazhatósági feltételeit. Bemutatunk néhány példát a nemlineáris diffúzióra különböző kezdeti és peremfeltételek esetében.

(Kulcsszavak: nemlineáris hődiffúzió, multigríd technika, hiszterézis)

ABSTRACT

Multigríd hysteretic heat diffusion

I. Jancskár, A. Iványi

University of Pécs, Department of Information Technology, H-7624 Pécs, Rókus u. 2.

In this paper a transient non-linear heat diffusion problem is studied. Considering hysteretic type temperature-dependence of thermal diffusion, the numerical solution is very resource- and time-consuming. Utilizing the advantages of the multigríd technique a coarse level iterating algorithm is introduced. Applying a hierarchical algorithm the solution time could be reduced. The proposed method has been verified by comparing to other numerical schemes. The thermal heating-cooling asymmetry resulted by the hysteresis and the memory character of diffusivity are proved by numerical simulations.

(Keywords: non-linear heat diffusion, multigríd technique, hysteresis)

BEVEZETÉS

Az utóbbi időkben egyre több tudományos munka foglalkozik változó termikus tulajdonságokkal rendelkező kompozit anyagokban lejátszódó termikus folyamatok analizálásával. Számos kísérleti mérés igazolja, hogy bizonyos összetett anyagok hővezetési tényezője illetve diffuzivitása nagyobb hőmérsékleti skálát tekintve nem tekinthető konstans értékűnek, sőt egyes esetekben hiszterézises jelleget mutat. Például Santos *at al.* (2000) különböző SiC-tartalmú kerámiák tanulmányozása során a hőmérséklettől függő, hiszterézis jelleget mutató diffuzivitás változást regisztrált. A hiszterézist mikrostrukturális változások idézik elő, például mikropedések miatti különböző expanziós jelenségek, expanziós anizotrópiák, és/vagy kristályszerkezet

módosulások. Calcogenid félvezetők vizsgálata során *Wawryk at al.* (2000) hiszterézises hőmérsékletfüggő hővezetéről számolt be. Hasonló jelenséget tapasztalt kompozit anyagokon végzett mérések során mágneses térben *Kashiwada at al.* (2003).

A hőmérséklettől függő hővezetési tulajdonságokkal rendelkező anyagokban lejátszó termikus folyamatok modellezése során rendszerint polinomiális vagy exponenciális közelítésekkel találkozhatunk a szakirodalomban (*Dai at al.*, 1998; *González-Fernández at al.*, 1998). Jelen munkánkban olyan modellt mutatunk be, amely figyelembe veszi a diffuzivitás hőmérséklettől függő hiszterézis jellegét. A numerikus megoldás a nemlineáris jelleg miatt igen erőforrás és időigényes művelet, ezért olyan algoritmust javasunk, amely kihasználva a multigrid technika adta lehetőségeket, rövidebb CPU idő elérésére törekszik. A módszert a durvább felbontáson iteráló multigrid módszernek neveztük el, segítségével a futási idő a finom felbontáson végzett iterációhoz képest lényegesen lecsökkenthető. Teszteredmények bemutatásával elemezzük a módszer pontosságát, a mért normák alapján eldönthető, hogy egy adott probléma esetén elfogadható-e a javasolt technika. A munka befejező részében a hiszterézises és a konstans hődiffúzió közötti eltéréseket mutatjuk be hevítési/hűtési folyamatok modell-eredményeinek összevetésével.

MATEMATIKAI MODELL

A tranziens hődiffúzió egyenlete hőmérsékletfüggő diffuzivitást feltételezve kétdimenziós esetben az alábbi parciális differenciálegyenlettel írható le:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[a(\Theta) \frac{\partial \Theta}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[a(\Theta) \frac{\partial \Theta}{\partial y} \right] + q^*(\Theta, t) \quad (1)$$

ahol $\Theta(t)$ a dimenziómentes hőmérséklet, $\Theta=(T-T_0)/(T_{\max}-T_0)$, $a(\Theta)$ a hődiffuzivitás, $q^*(\Theta, t)$ a forrástag. A vizsgálatokhoz $x, y \in \Omega$, L oldalhosszúságú $\Omega=[0, L] \times [0, L]$ négyzet alakú tartományt tételezünk fel. Az (1) parabolikus differenciálegyenlet megoldása megkívánja a kezdeti $\Theta(x, y, 0)=\Theta_{init}$, $x, y \in \Omega$, $x, y \in \Omega$, és a peremfeltételek megadását. Elsőrendű peremfeltételek estében $\Theta(x, y, t)=\Theta_w$, $x, y \in \Gamma(\Omega)$ ismert, $\Gamma(\Omega)$ jelenti a tartomány peremét. A továbbiakban azt az esetet tanulmányozzuk, amikor a diffuzivitás hőmérsékletfüggése hiszterézises jelleget mutat.

NUMERIKUS MEGOLDÁS

A nemlineáris modell numerikus megoldásához diszkretizáljuk az (1) differenciálegyenletet térben a centrális differencia sémát és időben a súlyozott differencia sémát alkalmazva. Az Ω tartományt felosztó háló pontjainak távolsága mindkét irányban legyen $h=L/n$, a pontok száma $(n+1) \times (n+1)$, a peremek legyenek hálópontokon. Az 1. ábra felső részén a tartomány finomabb felbontását, alatta ugyanazon tartomány egy durvább, $H=2h$ felosztását láthatjuk. Az egymásnak megfelelő pontokat bekereteztük.

A súlyozott differenciasémához a hőmérsékletfüggő diffuzivitasokat mindkét idősíkon azonos, átlagolt értékkel közelítjük. Bevezetve egy középső időszintet, ahol a hőmérséklet a k és $k+1$ időlépések átlaga, meghatározzuk a diffuzivitás értékét az $a(\Theta)$

hiszterézis modell felhasználásával: $\bar{a}_{ij}^{k+1/2, l} = a\left(\frac{1}{2}(\Theta_{ij}^{k+1, l-1} + \Theta_{ij}^k)\right)$. A diffuzivitás

referencia pontjait a 2. ábra szemlélteti. Láthatjuk, hogy a hálópontok közé átlagolt diffuzivitással számolunk a k és a $k+1$ időpillanatban is.

1. ábra

Diszkrétizálás térben: finomabb és durvább felbontás

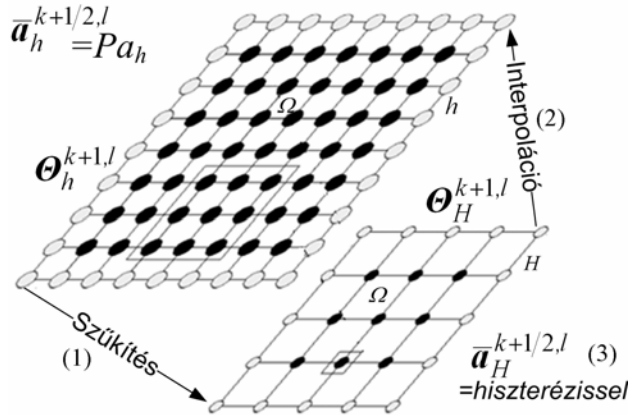


Figure 1: Discretising in space: finer and coarser resolutions

Interpolation(1), Restriction(2), Diffusivity is determined on the coarser grid with hysteresis function(3)

2. ábra

A diffuzivitás vonatkoztatási pontjai

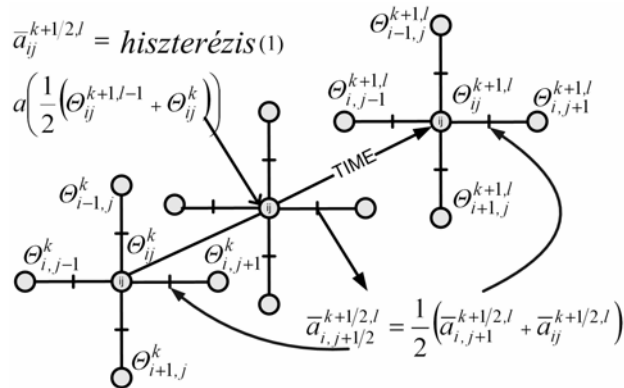


Figure 2: The reference points of the diffusivity in a time-centered method

Hysteresis(1)

A térbeli diszkretizálást két lépésben végezzük el. Az elsőrendű deriváltak jelentik a hőfluxus különbségeket. A hőfluxust a hálópontok közötti képzelt felületre vonatkoztatjuk:

$$\frac{\theta_{ij}^{k+1,l} - \theta_{ij}^k}{\Delta t} = \frac{1}{h} \left(\sigma (\Delta J_{i\pm 1/2,j}^{k+1,l} + \Delta J_{i,j\pm 1/2}^{k+1,l}) + (1 - \sigma) (\Delta J_{i\pm 1/2,j}^{k,l} + \Delta J_{i,j\pm 1/2}^{k,l}) \right) + q^{*k+1/2} \quad (2)$$

A diffuzivitást két szomszédos pont közötti átlagolással kapjuk meg, pl. az (i,j) és $(i,j+1)$ pontok között (2.ábra):

$$\bar{a}_{i,j+1/2}^{k+1/2,l} = \frac{1}{2} \left(\bar{a}_{i,j+1}^{k+1/2,l} + \bar{a}_{ij}^{k+1/2,l} \right) \quad (3)$$

A hőfluxus a $k+1$ -ik időpontban, a nemlinearitás miatti iteráció l -ik lépésében, az $(i+1/2,j)$ határfelületen

$$J_{i+1/2,j}^{k+1,l} = \bar{a}_{i+1/2,j}^{k+1/2,l} \left(\theta_{i+1,j}^{k+1,l} - \theta_{ij}^{k+1,l} \right) / h \quad (4)$$

Ugyanezen a felületen a k -ik időlépésben: $J_{i+1/2,j}^{k,l} = \bar{a}_{i+1/2,j}^{k+1/2,l} \left(\theta_{i+1,j}^k - \theta_{ij}^k \right) / h$. A többi helyen a fluxust hasonló módon számíthatjuk. Behelyettesítve a (4) hőfluxusokat a (3) egyenletbe és átrendezve, az alábbi differenciasémát kapjuk:

$$\begin{aligned} (1+p)\theta_{ij}^{k+1,l} - \frac{\Delta t}{2h^2} \left(\bar{a}_{i\pm 1/2,j}^{k+1/2,l} \theta_{i\pm 1,j}^{k+1,l} + \bar{a}_{i,j\pm 1/2}^{k+1/2,l} \theta_{i,j\pm 1}^{k+1,l} \right) = \\ (1-p)\theta_{ij}^k + \frac{\Delta t}{2h^2} \left(\bar{a}_{i\pm 1/2,j}^{k+1/2,l} \theta_{i\pm 1,j}^k + \bar{a}_{i,j\pm 1/2}^{k+1/2,l} \theta_{i,j\pm 1}^k \right) + q_{ij}^{k+1/2} \Delta t \end{aligned} \quad (5)$$

ahol

$$\bar{a}_{i\pm 1/2,j}^{k+1/2,l} \theta_{i\pm 1,j}^{k+1,l} = \bar{a}_{i+1/2,j}^{k+1/2,l} \theta_{i+1,j}^{k+1,l} + \bar{a}_{i-1/2,j}^{k+1/2,l} \theta_{i-1,j}^{k+1,l}, \quad (6)$$

stb., és

$$p = \frac{\Delta t}{2h^2} \left(\bar{a}_{i-1/2,j}^{k+1/2,l} + \bar{a}_{i+1/2,j}^{k+1/2,l} + \bar{a}_{i,j-1/2}^{k+1/2,l} + \bar{a}_{i,j+1/2}^{k+1/2,l} \right). \quad (7)$$

A bemutatott módszer tulajdonképpen a DuFort–Frankel séma kétdimenziós kiterjesztésének tekinthető, így csak $\Delta t \bar{a}_{\max} / h^2 \ll 1$, $\bar{a}_{\max} = \max(\bar{a}_{ij})$, $i,j=1,\dots,n-1$ korlátozással konzisztens az eredeti differenciálegyenlettel (Stojan, 2005).

A belső hálópontokra az (5) egyenlet az alábbi mátrix alakban írható fel:

$$A_h^{k+1,l} \theta_h^{k+1,l} = B_h^{k+1,l} \theta_h^k + Q_h^{k+1/2} \quad (8)$$

ahol $A_h^{k+1,l}$ együtthatómátrix, $\theta_h^{k+1,l}$ az ismeretlen hőmérsékletvektor, $B_h^{k+1,l}$ a θ_h^k ismert hőmérsékletvektor együtthatómátrixa, $Q_h^{k+1/2}$ a forrástag Δt -szerese. Az alsó indexben található 'h' a térbeli felbontás szintjére emlékeztet. Az iteráció kezdetén $\theta_h^{k+1,0} = \theta_h^k$, $\bar{a}_{ij}^{k+1,0} = \bar{a}_{ij}^k$ és az iteráció során $\bar{a}_{ij}^{k+1,l} = a \left(\frac{1}{2} (\theta_{ij}^{k+1,l-1} + \theta_{ij}^k) \right)$, $i,j=1,\dots,n-1, l=1,2,\dots$

A (8)-hoz hasonló nagyméretű rendszerek megoldásának korszerű eszköze a multigríd technika, többek között jó konvergencia tulajdonságai miatt (Stojan, 2005). A multigríd módszerek lényegét ismertnek tételezzük fel (lásd pl. Hackbusch, 1985). A javasolt hierarchikus algoritmusba az ún. Full Multigríd (FMG) és a sima multigríd (MG) technikát is beépítettük, a FMG W -ciklusokat szemlélteti a 3. ábra.

3. ábra

Teljes multigríd módszer (FMG) W -ciklus négy felbontási szinten

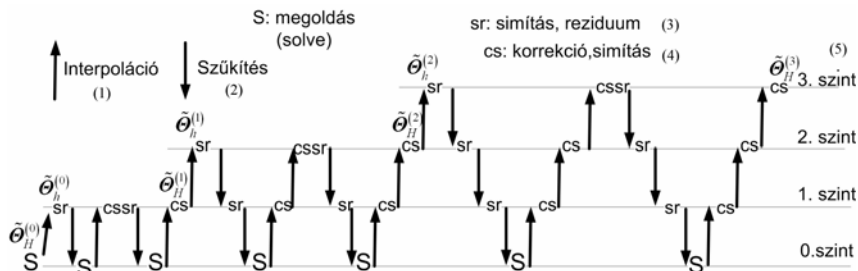


Figure 3: Full Multigrid W -cycles on four grid levels

Interpolation(1), Restriction(2), Smoothing and residuum(3), Correction and smoothing(4), Grid levels(5)

A diffuzivitás hőmérséklet függése miatt a (8) implicit séma iterációt igényel. Az iteráció nagyméretű rendszerek esetében igen erőforrás és időigényes művelet. A hiszterézises diffuzivitás is jelentősen növeli a megoldási időt, mert minden egyes hálópont saját lokális hiszterézis memóriával rendelkezik. Az általunk javasolt módszerrel, kihasználva a multigríd technika kínálta lehetőségeket, a megoldási idő jelentősen csökkenthető. Az iteráció előtt a (8) problémát redukáljuk egy durvább, $H=2h$ felbontásra (1. ábra):

$$A_H^{k+1,l} \theta_H^{k+1,l} = B_H^{k+1,l} \theta_H^k + Q_H^{k+1/2}, \quad (9)$$

ahol az iteráció $\theta_H^{k+1,0}$ $k+1$ -ik időpontbeli kezdeti hőmérsékletét az ún. szűkítéssel (restriction: R_h^H) határozzuk meg a k -ik időpont hőmérsékletéből: $\theta_H^{k+1,0} = \theta_H^k = R_h^H \theta_h^k$.

A diffuzivitás kezdeti értéke a hiszterézis modellből: $\bar{a}_{ij_h}^0 = a(\theta_{ij_h}^k)$. A $Q_h^{k+1/2}$ forrástágot is leszűkítjük, de $Q_H^{k+1/2}$ a durvább felbontásra közvetlenül is kiszámítható. A diffuzivitás hőmérséklet-függése miatti iterációt a (9) egyenlettel ezen a durvább felbontáson végezzük el, $\bar{a}_{ij_h}^{k+1/2,l} = a\left(\frac{1}{2}(\theta_{ij_h}^{k+1,l-1} + \theta_{ij_h}^k)\right)$. Az iteráció véget ér, ha két iteráció közötti különbség

egy előre definiált ε érték alá csökken: $|\theta_H^{k+1,l} - \theta_H^{k+1,l-1}| < \varepsilon$. Az iteráció eredményeként kapott diffuzivitás- és hőmérsékletértékeket interpoláljuk a finomabb felbontásra. Jelölje P_H^h az ún. prolongációs operátort, I_H^h a bilineáris interpolációs operátort, ekkor $\theta_h^{k+1,0} = I_H^h \theta_H^{k+1,l}$ és $\bar{a}_{ij_h}^{k+1/2} = S_{GS} P_H^h \bar{a}_{ij_h}^{k+1/2,l}$, ahol S_{GS} jelenti a Gauss-Seidel simító eljárást. Az interpolált hőmérséklet jó kezdeti hőmérsékletnek tekinthető a finomabb (eredeti h) felbontáson. A finomabb felbontás megoldásaként keresett hőmérsékletmezőt további multigríd iterációval határozzuk meg a (8) egyenlet együtthatói és forrástága szerint, de a diffuzivitás értékét már nem változtatjuk. A 4. ábrán láthatjuk a javasolt durvább szinten iteráló multigríd algoritmus vázlatát. A nemlineáris iterációban FMG

algoritmust, a finomabb szinten MG algoritmust futtatunk. Az FMG módszer előnye, hogy a legdurvább szinten pontos megoldással kezdi az iterációt, így gyorsabban, egyetlen ún. W-ciklus sorozattal jut el a megfelelően pontos megoldáshoz. A finomabb felbontáson erre nincs szükség, hiszen az alacsonyabb szintről már egy jó kezdeti becsléssel lépünk fel.

4. ábra

A javasolt durvább szinten iteráló multigríd algoritmus vázlata

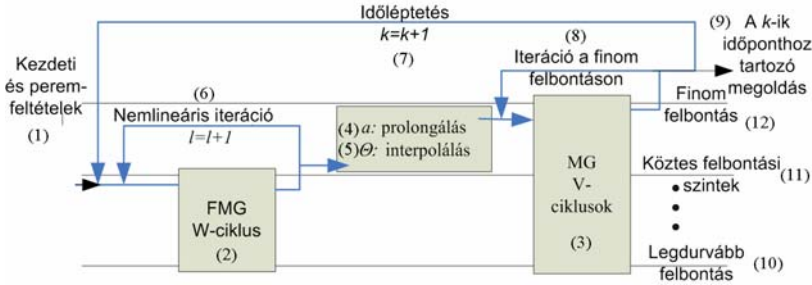


Figure 4: The coarse level iterating multigrid algorithm

Initial conditions(1), Full multigrid W-cycles on the coarser grid(2), Multigrid V-cycles on the finest grid(3), Prolongation(4), Interpolation(5), Iteration of nonlinearity(6), Time stepping(7), Iteration on finest grid level(8), Solution at the time index k (9), Coarsest grid(10), Medial grid levels(11), Finest grid(12)

Az $A_H^{k+1,l}$ és $B_H^{k+1,l}$ együtthatómátrixok konvolúciós magjait, a θ_H^k hőmérsékletet, a $Q_H^{k+1/2}$ forrástágot minden egyes felbontási szintre meg kell határozni. Az együtthatómátrixok magjai pontról pontra változnak a diffuzivitás függvényében, pl.:

$$A_H^{k+1,l} = \begin{bmatrix} 0 & -c\bar{K}_{i,j-1/2_H}^{k+1/2,l} & 0 \\ -c\bar{K}_{i-1/2,j_H}^{k+1/2,l} & (1+p)_H & -c\bar{K}_{i+1/2,j_H}^{k+1/2,l} \\ 0 & -c\bar{K}_{i,j+1/2_H}^{k+1/2,l} & 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

ahol $c=\Delta t/2H^2$. A javasolt algoritmus tehát minden szinten tárolja az előző időpont hőmérsékleteit, a forrástágot, a diffuzivitást, a konvolúciós magokat pedig minden hálópontra és minden felbontási szinten újból generálja. Mivel az FMG minden felbontási szinten előállítja a megoldást, a kerekítési hiba becsülhető és felhasználható a konvergencia meghatározására. A MG algoritmusban V-ciklusokat iterálunk, itt csak a legfinomabb felbontáson kapjuk meg a hőmérsékleteket. Az iteráció stop feltétele ha a reziduum normája a kiindulási norma ε -od részére csökken:

$$\|r_h^{k+1}\| < \varepsilon \|A_h^{k+1,l} I_H^h \theta_H^{k+1,l} - B_h^{k+1,l} \theta_h^k - Q_h^{k+1/2}\|, \varepsilon < 1.$$

A hiszterézis numerikus közelítése

A diffuzivitás hőmérsékletfüggését leíró numerikus modellhez a mágneses hiszterézis leírására elterjedt diszkrét Preisach modellt alkalmaztuk. A diszkrét Preisach modell alapja az ún. Preisach háromszög (Iványi, 1997), amely véges számú hiszterézis relét tartalmaz

(5. ábra). A modell bemeneti változója a hőmérséklet, kimenete a diffuzivitás. Az eredeti modellt úgy módosítottuk, és a $\mu(\Theta_\alpha, \Theta_\beta)$ eloszlásfüggvényt úgy választottuk meg, hogy a hiszterézis alakja feleljen meg a Santos at al., (2000) munkájában bemutatott, mérésrel felvett hiszterézis görbének. A diffuzivitás hőmérsékletfüggését leíró rekurzív formula:

$$a(\Theta^{k+1}) = a(\Theta^k) \pm \left(b^v \frac{T_p}{m} \sum_j \sum_i \mu(\Theta_{\alpha_i}, \Theta_{\beta_j}) \right), i, j = m, i, j \in P \quad (11)$$

Ahol T_p a P tartomány területe, amely felett az utolsó lépésben megváltozott a hiszterézis relék állapota, m a P tartományban található relék száma (5. ábra). A második rész előjele a hőmérsékletváltozás irányától függ. Emelkedő hőmérséklet esetén pozitív, csökkenő hőmérséklet esetében negatív az előjel. v a fűtési-hűtési ciklusok száma, b^v egy megfelelő szorzótényező, mindkettő értéke függhet a ciklusszámtól. A diffuzivitás alapértéke: $a(\Theta^0) = a^v$ szintén a ciklusszám függvénye. A 6. ábrán láthatunk néhány, a fenti modell segítségével előállított hiszterézis görbét.

Hevítés során a hőmérséklet emelkedésével a mikrostrukturális változások miatt a diffuzivitás hirtelen emelkedést mutat. További hőmérsékletemelkedésre a diffuzivitás alig változik, majd a magasabb hőmérséklet tartományban újabb meredek emelkedés tapasztalható. A hőmérséklet csökkentésével a diffuzivitás is csökken, de magasabb értéken marad, mint hevítés során. E egymást követő termikus ciklusok hiszterézis görbéje nem feltétlenül esik egybe, ezt fejezi ki a modell v paramétere.

A javasolt módszer jellemző tulajdonságai

A javasolt módszer jogosultságát, alkalmazhatóságát és jellemző paramétereit az alábbi tesztprobléma segítségével vizsgáltuk: a kezdeti hőmérséklet-eloszlás legyen: $\Theta = (x, y, 0) = 1$, $t = 0$, a peremfeltétel: $\Theta = (x, y, t) = 0$, $x, y \in \Gamma\Omega$, $t > 0$. Az időlépés: $\Delta t = 500$ s, $L = 0.5$ m, $a_0 = 2.5 \cdot 10^{-7}$ m²/s, a felbontás 33×33 pont. A multigríd paraméterek: az elő- és utósimítások száma 3, a legdurvább felbontás 5×5 pont, a felbontási szintek közötti léptetés bilineáris interpolációval illetve teljes szűkítéssel (full weighting restriction) történt. A legdurvább szinten a fokozatos túlrelaxálás algoritmusát alkalmaztuk megoldóként.

5. ábra

A Preisach háromszög (a) és eloszlásfüggvény 3D-ben (b)

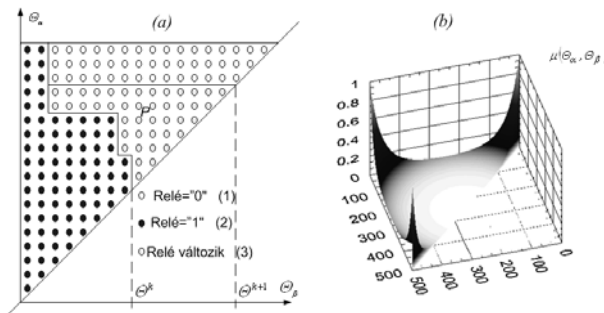


Figure 5: The Preisach triangle (a) and the distribution function (3D) (b)

Relay is off (1), Relay is on(2), Relay is changing to on(3)

6. ábra

A diffuzivitás hőmérsékletfüggése a diszkrét modell szerint

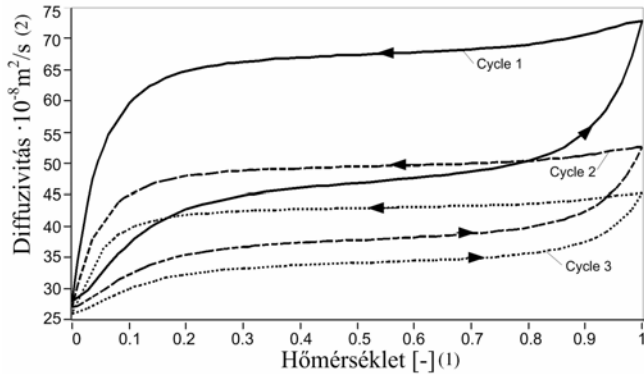


Figure 6: The temperature dependent hysteresis of the thermal diffusivity and effect of the thermal cycling.

Temperature(1), Thermal diffusivity(2)

A javasolt algoritmusban a durvább felbontás iterációja után a diffuzivitás értéke változatlan marad. Kérdés, vajon milyen módon vetítsük fel a finomabb felbontásra? Kétdimenziós esetben a bilineáris interpoláció a legelterjedtebb technika, alkalmazható még a sima prolongáció is. (Mivel célunk a minél rövidebb CPU idő, magasabb rendű interpolációs módszerek nem jöhetnek szóba.) A 7. ábrán látható a hőmérsékleti görbék a vizsgált tartomány középvonalában, három különböző időpontban, három különböző numerikus módszerrel készültek. A 7. ábra a görbéje a finom felbontáson végzett iteráció eredménye. A b görbe mutatja a prolongálással vetített diffuzivitással, a c görbe a bilineáris interpolációval kapott megoldást. Látható, hogy mindhárom időpontban a prolongálással kapott diffuzivitással végzett számítások közelítik meg jobban a finom felbontáson végzett iteráció eredményét.

A teljes hőmérsékleti mező közti különbséget normaképzéssel határozhatjuk meg. A 8. ábra a görbéje a bilineáris interpolációval vetített diffuzivitás és a finom felbontáson végzett iteráció, mint referencia hőmérséklet-eloszlás közötti különbség normáját mutatja az időben. A b görbe a prolongáció és a referencia hőmérsékletmező közti különbség normája. Látható, hogy az b görbe mindvégig az a görbe alatt marad egy nagyságrenddel. Közelítve az állandósult állapot felé, a normák csökkennek. A módszer alkalmazható, ha az eltérés nagyságrendje tolerálható.

A diffuzivitás időbeli átlagolásának jogosságát különböző időlépésekkel kapott eredmények összehasonlításával teszteltük, azonos térbeli felbontás mellett. A referencia időlépés az eredeti időlépés tizede. A 8. ábra c görbéje mutatja a két időlépés közötti különbség normáját. Az első időpillanattól eltekintve gyakorlatilag nincs különbség a két számítás között, vagyis az időbeli átlagképzés megfelelő, amíg a regularitást és konzisztenciát nem sérti Δt növelése.

A durva felbontáson végzett iterációs módszer futási idejét egységnyiinek véve, a finom felbontáson végzett iteráció CPU ideje négy. Tárigény tekintetében a hiszterézis számításának durvább felbontási szintre történő helyezése jelenti a legnagyobb

megtakarítást. Minden hálóponthoz tartozik egy lokális memória, amelyben az adott ponthoz tartozó $\Theta_{ij}(k\Delta t)$ sarokpontjait tároljuk. Feltételezve, hogy minimálisan 30 értéket tárolunk és dolgozunk fel pontonként és ciklusonként, az iterációt áttéve alacsonyabb felbontásra, kb. $23n^2$ adatnak megfelelő memóriát takaríthatunk meg. Nagyméretű feladatok esetében ez jelentősnek tekinthető és kihatással lehet a CPU időkre is.

7. ábra

Hőmérséklet a tartomány középvonalán, 3 különböző időpontban, a diffuzivitás iterálása a finom felbontáson (a), iteráció a durva felbontáson, vetítés prolongálással (b), vetítés bilineáris interpolációval (c)

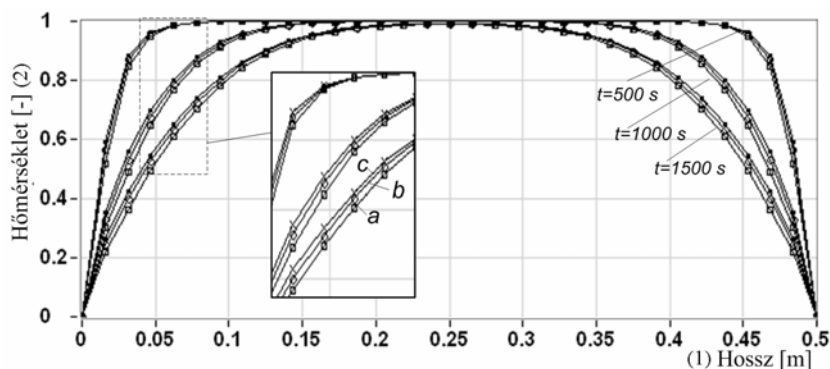


Figure 7: Temperature profiles along the axis of the domain at three time steps: fine grid iteration (a), coarse level iteration with prolongation (b), with bilinear interpolation (c)

Length(1), Temperature(2)

8. ábra

A számítási algoritmusok különbségéből származtatott normák

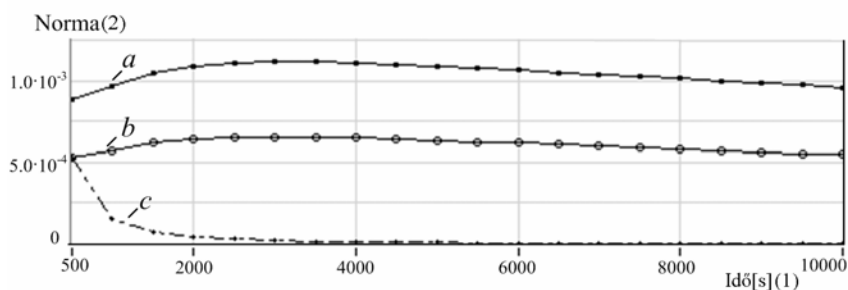


Figure 8: Norm of differences of the calculation schemes: differences between the fine grid iteration and coarse grid iterations with bilinear interpolation (a), with prolongation (b), differences between two distinct time steps (c),

Time(1), Norm(2)

SZIMULÁCIÓS EREDMÉNYEK

A szimulációs algoritmus segítségével a nemlineáris diffúzió fenti modelljének néhány érdekes tulajdonságát szeretnénk bemutatni, összevetve a konstans diffúziót feltételező modellel. Példáink olyan eseteket elemeznek, ahol a diffuzivitás a fő hevítési és hűlési görbe mentén változhat, például a peremek monoton hűtésével vagy fűtésével. Az első példában $\Theta=(x,y,0)=1$, $t=0$, a peremfeltétel: $\Theta=(x,y,t)=1$, $x,y \in \Gamma\Omega$, $t>0$. A második esetben: $\Theta=(x,y,0)=1$, $t=0$, a peremfeltétel: $\Theta=(x,y,t)=0$, $x,y \in \Gamma\Omega$, $t>0$. A többi paraméter megegyezik az előző fejezet adataival. A 9. ábrán látható, hogy a vizsgált tartomány közepén hogyan alakul a hőmérséklet az első ötven időlépésben, *a*) és *c*) konstans *b*) és *d*) hiszterézises diffuzivitással.

9. ábra

Hevítési (*a*, *b*) és hűlési (*c*, *d*) hőmérsékleti profilok a tartomány középvonalán, konstans (*a*, *c*) és hiszterézises (*b*, *d*) diffuzivitást feltételezve

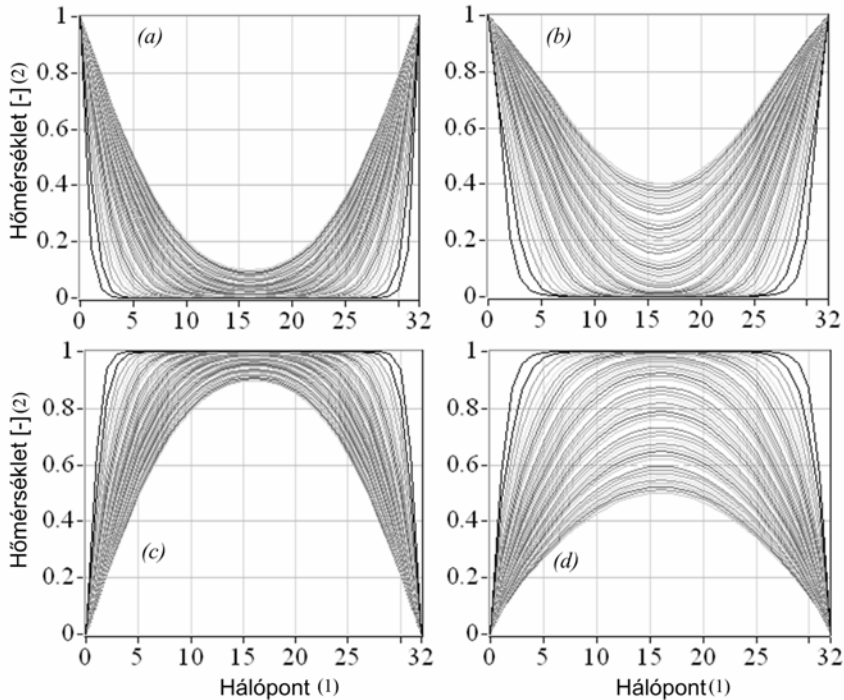


Figure 9: Heating-cooling profiles of the middle axes of the domain: with constant (*a*) and (*c*), with hysteretic diffusivity (*b*) and (*d*),

Grid point(1), Temperature(2)

A 10. ábrán a tartomány középpontjának hőmérsékleti tranzienseit láthatjuk a négy vizsgált esetre. Konstans diffuzivitással a hevítés-hűtés tranziensek szimmetrikusak. A hiszterézises diffuzivitás miatt a hevítési-hűtési tranziensek eltérőek.

10. ábra

Hőmérséklet-tranziensek a tartomány közepén, konstans és hiszterézises diffuzivitással

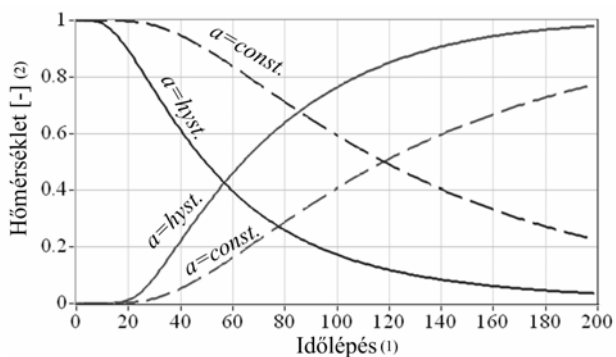


Figure 10: Temperature transients of the middle of the domain with hysteretic and constant diffusivity

Time index(1), Temperature(2)

11. ábra

A hűtési folyamat hőmérséklet-eloszlása a 20. időpillanatban és a hozzá tartozó diffuzivitás

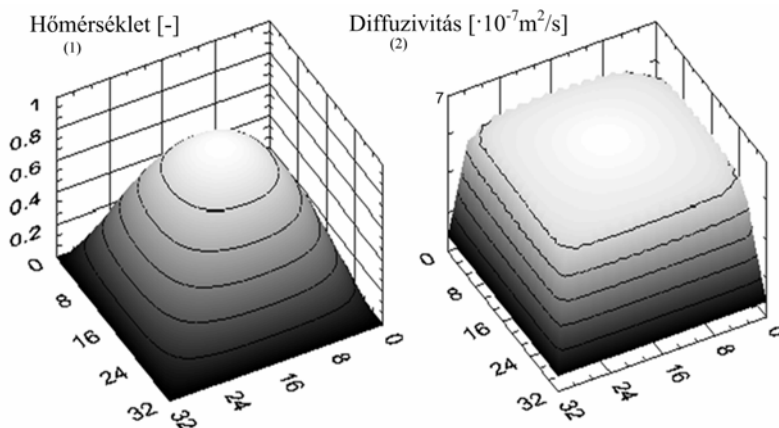


Figure 11: Cooling process: temperature field (a) and the corresponding thermal diffusivity at time-index $k=20$ (b),

Temperature(1), Thermal diffusivity(2)

A termikus folyamat felgyorsult, a hűlési folyamat magasabb diffuzivitással indul, alacsonyabb hőmérsékleteken is magasabb értéken marad, mint hevítés során. A 11.

ábrán látható a huszadik időpillanathoz tartozó hőmérsékleti mező és a hozzá tartozó diffuzivitás. A diffuzivitás alakja még emlékeztet a kiindulási hőmérséklet-eloszlásra.

A teljes felületen a két fajta diffúziót az eltérések normájával hasonlíthatjuk össze. A 12. ábra *a* görbéje a hevítési folyamatra, *b* görbéje a hűtési folyamatra vonatkozóan mutatja a konstans és a hiszterézises diffúzió közötti eltérés normájának alakulását. A norma az idő előrehaladásával nő, elér egy maximum értéket, majd lassan csökken, ahogy közelít az állandósult állapothoz.

12. ábra

Az eltérések normája a hevítési (*a*) és a hűtési (*b*) folyamat során

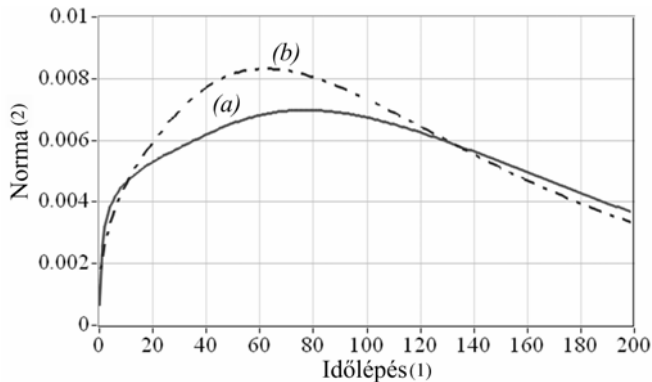


Figure 12: Norm of differences between hysteretic and normal heat diffusion: in the heating(*a*) and cooling processes(*b*),

Time index(1), Norm(2)

A hűtési folyamat a magasabb diffuzivitások miatt kezdetben jobban eltér a konstans diffuzivitású folyamattól, és mivel a folyamat így felgyorsult, az állandósult állapotot is gyorsabban közelíti meg. Az itt bemutatott nemlinearitás azon kompozit anyagok jellemzője, amelyeknek diffuzivitása az ismertett hiszterézis görbékhez hasonló tendenciát mutat. A diffúziós modell megfelelő paraméterezésével a javasolt algoritmus más jellegű, és más irányú folyamatok szimulálására is alkalmas. A modell lehetőséget nyújt az ún. hiszterézises minor hurkokon változó diffuzivitás hatásának tanulmányozására is.

KÖVETKEZTETÉSEK

A hőmérséklettől függő diffuzivitású anyagokban lejátszódó termikus folyamatok tranziensei jelentősen eltérhetnek a konstansnak tekinthető vezetési tulajdonságú anyagokétól. Munkánkban ezen folyamatok modellezésére alkalmas olyan hierarchikus algoritmust mutattunk be, amely a multigrid technika adta lehetőségekre építve, rövidebb futási idő elérésére törekszik. Az algoritmus igen jó konvergencia tulajdonságú, elegendő minden időlépésben néhány iterációs ciklus a DuFort-Frankel sémához hasonló implicit sémával. Az időlépés nagysága az implicit séma ellenére nem választható meg

tetszőlegesen, a séma csak korlátozásokkal konzisztens az eredeti differenciálegyenlettel, annak ellenére, hogy a megoldás konvergens, túl nagy időlépéssel nem reguláris megoldást kaphatunk. A hiszterézises diffúzió hűtés/fűtés tranziense aszimmetrikus jellegű. A bemutatott példák egy bizonyos típusú hiszterézises diffúzióra jellemzőek. A hiszterézis modell paramétereinek, eloszlásfüggvényének módosításával az algoritmus más jellegű, más irányban változó hiszterézises diffúziós modellek megoldására is alkalmas.

KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

Az alkalmazott kutatás a Nemzeti Fejlesztési Terv Gazdasági Versenyképesség Operatív Program „Infokommunikációs technológia kidolgozása és hasznosítása az energia-elosztás területén ” című pályázata (GVOP-3.1.1.-2004-05-0125/3.0.) keretében valósul meg.

IRODALOM

- Dai, W., Woodward, P.R., (1998). Numerical Simulation for Nonlinear Heat Transfer in a System of Multimaterials. In: J. Comp. Phys. 139. 58-78.
- González-Fernández, C.F., Alhama, F., Alarcón, M., López-Sánchez, J.F. (1998). Digital simulation of transient heat conduction with polynomial variable thermal conductivity and specific heat. In: Comp. Phys. Comm. 111. 53-58.
- Hackbusch, W. (1985). Multigrid Methods and Applications, Springer, Berlin.
- Iványi, A. (1997). Hysteresis models in electromagnetic computation. Budapest : Akadémiai Kiadó
- Kashiwada, Y., Fujishiro, H., Ibeke, M. (2003). Thermal conductivity of $\text{Pr}_{0.65}(\text{Ca}_{1-z}\text{Sr}_z)_{0.35}\text{MnO}_3$ under applied field. Physica B. 329-333, 924-925.
- Santos, W.N., Baldo, J.B., Taylor, R. (2000). Effect of SiC on the thermal diffusivity of silica-based materials. In: Material Research Bulletin. 35. 2091-2100.
- Stojan, G., Takó, G. (1995). “Numerical methods”, (in Hungarian) ELTE. Budapest.
- Wawryk, R., Marucha, Cz., Balcerek, K., Terzijska, B.M., Ivanova, Z., (2000). Thermal Conductivity of polycrystalline and amorphous Se-Te-Cu system. In: Cryogenics. 40. 749-752.

Levelezési cím (*Corresponding author*):

Jancskárné Anweiler ildikó

Pécsi Tudományegyetem, Műszaki Kar, Műszaki Informatika Tanszék
7624 Pécs, Rókus u. 2.

*University of Pécs, Department of Information Technology
H-7624 Pécs, Rókus u. 2.*

Tel.: 36-72-501-534 Fax: 36-72-501-534

e-mail: jai@morpheus.pte.hu